

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

---

ВЫПУСК

11

Под общей редакцией  
академиков М. А. ЛЕОНОВИЧА  
и Б. Б. КАДОМЦЕВА



МОСКВА  
ЭНЕРГОИЗДАТ · 1982

**Редколлегия:** А. А. Галеев, В. В. Параил, О. П. Погуце,  
Д. Д. Рютов

**УДК 533.9**

**Вопросы теории плазмы.** Вып. 11./Под общ. ред. акад.  
М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергонздат,  
1982, 240 с.

Выпуск содержит основные работы по динамике ускоренных электронов в токамаке, влиянию баллонных эффектов на МГД устойчивость плазмы, излагаются методы и результаты анализа равновесия плазмы в тороидальных установках.

Для специалистов по физике плазмы, проблемам термоядерной энергетики и космической физики.

Ил. 73. Бнблногр. 205.

**В** 1704040000-131 БЗ-27-2-80 Подписное.  
051(01)-82



## **Михаил Александрович Леонтович**

**[7 марта 1903 г. — 30 марта 1981 г.]**

30 марта 1981 г. скончался редактор серии «Вопросы теории плазмы» академик Михаил Александрович Леонтович. Ушел из жизни человек исключительных личных качеств, выдающийся советский физик-теоретик, один из создателей советских научных школ в области радиофизики и физики плазмы.

М. А. Леонтович родился 7 марта 1903 года на Украине в семье ученого. Его отец, А. В. Леонтович — известный физиолог, впоследствии академик АН УССР. Его дед по материнской линии — видный русский механик В. Л. Кирпичев. В 1923 г. М. А. Леонтович окончил Московский Государственный университет. С 1920 г. в течение пяти лет он работал в комиссии по исследованию Курской магнитной аномалии, читал лекции в Московском университете, а затем работал в Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР. Его учителем, оказавшим на него глубокое влияние, был выдающийся физик Л. И. Мандельштам.

Круг научных интересов М. А. Леонтовича всегда был очень широк. Им выполнены важные работы по теории молекулярного рассеяния света, поглощения звуковых и ультразвуковых волн в газах и жидкостях. Вместе с Л. И. Мандельштамом и А. А. Андроновым он развил теорию автоколебательных систем, параметрического резонанса и адиабатических инвариантов, сыгравшую большую роль в развитии радиофизики.

Существенный вклад М. А. Леонтович внес в статистическую физику и электродинамику. Большое значение в теории распространения электромагнитных волн вблизи проводящих поверхностей сыграли введенные им граничные условия, получившие название «граничных условий Леонтовича». В совместной с В. А. Фоком работе по теории распространения радиоволн вокруг Земли им впервые применен метод параболического уравнивания, нашедший впоследствии широкое применение для описания нелинейных явлений в оптике лазерного излучения. В 1946 г. М. А. Леонтович был избран действительным членом АН СССР.

С 1951 г. и до конца своей жизни М. А. Леонтович возглавлял теоретические исследования по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу в ИАЭ им. И. В. Курчатова. Ему принадлежит ряд ключевых физических идей и исследований по динамике плазмы: теории удержания и стабилизации плазменного шнура в системах типа токамак с помощью проводящего кожуха, идеи и первые исследования по устойчивости плазмы с током в магнитном поле, динамике инерционного плазменного шнура и др. Большое внимание М. А. Леонтович уделял воспитательной задаче. Многие из учеников М. А. Леонтовича стали выдающимися физиками, руководителями научных коллективов и целых научных направлений. Научное влияние М. А. Леонтовича распространялось далеко за пределы возглавляемой им лаборатории. На суд семинара Леонтовича отдавали свои новые работы теоретики других институтов. С обсуждением своих проблем и результатов исследований к М. А. Леонтовичу приезжали физики-экспериментаторы из многих физических центров страны. М. А. Леонтович привлекал к себе широтой своего мышления, неподдельным интересом ко всему новому и своей благожелательной и благотворной критикой. Высокая научная взыскательность и требовательность к уровню научной работы, бескомпромиссная непримиримость ко всякого рода фальши поставила М. А. Леонтовича верховным арбитром в спорных ситуациях.

Одной из сторон научно-педагогической деятельности М. А. Леонтовича было издание под его редакцией четырехтомника «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» в 1958 г. и серии выпусков с 1963 г. «Вопросы теории плазмы», являющейся наиболее полным отражением достижений в теории высокотемпературной плазмы. Эти сборники, переводимые за рубежом, стали учебным пособием для физиков-теоретиков ряда стран, работающих в области управляемого термоядерного синтеза.

Заслуги М. А. Леонтовича отмечены высокими наградами: тремя орденами Ленина, пятью орденами Трудового Красного Знамени и медалями. Он лауреат Ленинской премии 1958 г. В 1952 г. он был награжден большой Золотой медалью им. А. С. Попова.

Светлый образ Михаила Александровича Леонтовича — умного, безупречно честного и глубоко принципиального человека — гражданина, патриота, ученого и педагога, навсегда сохранится в сердцах его многочисленных учеников, всех, кто имел счастье работать рядом с ним и кто испытал на себе его благотворное влияние.

## § 1. Введение

В установках токамак нагрев и удержание плазмы осуществляется протекающим по шнуру током. Этот ток создается тороидальным индукционным электрическим полем  $E$ ; наличие этого поля является неотъемлемым свойством установок этого типа и с неизбежностью приводит к появлению в плазме токамака убегающих электронов. Явление убегания — один из классических эффектов кинетической теории ионизованных газов; оно является прямым следствием дальнего действия кулоновских сил рассеяния при столкновениях заряженных частиц. Эта особенность кулоновского взаимодействия приводит к быстрому падению сечения рассеяния заряженных частиц  $\sigma$  с ростом скорости  $\sigma \sim v^{-4}$ . Для быстрых электронов сила динамического трения не может скомпенсировать ускорение, вызванное электрическим полем, и такие частицы уходят в режим непрерывного ускорения.

Как правило, установки токамак работают в режимах слабого электрического поля, когда выполнено сильное неравенство  $E \ll E_D$ ,  $E_D$  — так называемое поле Драйсера (определение см. ниже) ( $E/E_D < 0,1$ ). В этом случае в режим непрерывного ускорения переходит экспоненциальная малая часть электронов. Тем не менее наличие таких убегающих электронов (особенно в разрядах с умеренной плотностью, где отношение  $E/E_D$  не слишком мало) приводит ко многим экспериментально наблюдаемым эффектам. Прежде всего, эти частицы (если они обладают большой поперечной энергией) дают существенный вклад в диамагнитную «температуру» плазмы, не давая вклада в температуру, определяемую методом томсоновского рассеяния. Именно поэтому в ранних экспериментах [1], где не использовался метод томсоновского рассеяния, был сделан вывод о том, что электронная температура растет при уменьшении плотности плазмы. Попадая на стенки камеры, быстрые электроны рождают интенсивное рентгеновское излучение, а в токамаке — Т-10 в ускорительных режимах электроны с релятивистской энергией, попадая на стенки камеры, вызывали интенсивное рентгеновское излучение, приводящее к образованию большого потока фотонейтронов [2]. Обладая к тому же большой направленной скоростью, такие электроны могут переносить заметную долю тока; так, на установке Т-6 были исследованы режимы, при которых практически весь ток переносился ускоренными электронами, так что основная плазма из-за отсутствия джоулева энерговыделения оставалась холод-

ной [3]. Одним из самых ярких доказательств присутствия в токамаках убегающих электронов является, по-видимому, наблюдаемая в разрядах с умеренной плотностью так называемая веерная неустойчивость плазмы — [4—10]. Развитие этой неустойчивости, как правило, сопровождается периодическими (с  $\tau \sim 1$  мс) всплесками диамагнетизма плазмы, рентгеновского и синхротронного излучений, изменениями напряжения на обходе плазменного шнура и другими макроскопическими эффектами, самым драматическим из которых был прожог камеры французского токамака TFR [4]. Приведенные данные показывают, что ускоренные электроны в токамаке могут заметно влиять на макроскопические характеристики разряда. Необходимость детального исследования поведения ускоренных электронов в токамаке диктуется еще и тем, что в установках будущего поколения количество ускоренных электронов и их роль в макроскопическом поведении плазмы могут возрастать из-за увеличения длительности разряда и времени удержания быстрых электронов.

## § 2. Образование ускоренных электронов в токамаке

Прежде чем перейти к кинетическому описанию процесса убегаия, введем основные используемые ниже понятия.

Рассмотрим движение пробного электрона в плазме с температурой электронов  $T_e$ , ионов —  $T_i$  и плотностью  $n_e = \sum_j z_j n_j$  ( $z_j$  — эффективный заряд иона). Будем считать, что электроны и ионы имеют максвелловские распределения по скоростям. Сила динамического трения, т. е. изменение во времени импульса пробной частицы в направлении ее движения, имеет вид [11]

$$\langle F_T \rangle = \langle m \frac{du}{dt} \rangle = \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha} n_{\alpha}}{T_{\alpha}} \left( 1 + \frac{m}{M_{\alpha}} \right) G(\xi_{\alpha}), \quad (2.1)$$

где в (2.1) суммирование идет по всем сортам частиц:

$$c_{\alpha} = 4\pi e^2 e_{\alpha}^2 \ln \Lambda, \quad \xi_{\alpha} = u/v_{T_{\alpha}}, \quad v_{T_{\alpha}} = \sqrt{2T_{\alpha}/M_{\alpha}},$$

$u$  — скорость пробного электрона;

$$G(\xi) = \frac{\Phi(\xi) - \xi \frac{d\Phi}{d\xi}}{2\xi^2}; \quad \Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp(-t^2) dt;$$

$$G(\xi) \rightarrow \frac{1}{2\xi^2} \text{ при } \xi \rightarrow \infty,$$

$$G(\xi) \rightarrow \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \xi \text{ при } \xi \rightarrow 0.$$

В рассматриваемом нами случае плазмы с одним сортом ионов из (2.1) можно получить следующее выражение [11]:

$$\langle F_T \rangle = -c_e n_e \left[ z_i \frac{M_i}{m} \frac{G(\xi_i)}{T_i} + 2 \frac{G(\xi_e)}{T_e} \right]. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что для электрона с энергией  $mu^2/2 < T_e$  сила трения увеличивается с ростом скорости, а при  $mu^2/2 > T_e$  падает как  $u^{-2}$ . Наличие в (2.2) участка с  $\frac{\partial}{\partial u} \langle F_T \rangle > 0$  обеспечивает поддержание стационарного классического тока, а участок с  $\frac{\partial}{\partial u} \langle F_T \rangle < 0$  приводит к рождению убегающих электронов. В плазме с приложенным электрическим полем  $E$  выражения (2.1), (2.2), вообще говоря, становятся несправедливыми из-за отклонения электронной функции распределения от максвелловской. Оказывается, однако, что для не слишком сильных полей ( $E/E_D \lesssim 0,1$ ) эти выражения с хорошей точностью правильно описывают силу трения для надтепловых электронов. Поле  $E_D$  определяется следующим образом:

$$E_D = 4\pi e^3 \frac{n_e}{T_e} \ln \Lambda, \quad (2.3)$$

или

$$E_D = 4 \cdot 10^{-2} \frac{\ln \Lambda}{15} \frac{n_e}{10^{13}} \frac{10^{3*}}{T_e}.$$

(Электрическое поле в (2.3) имеет размерность В/см, плотность электронов в  $1/\text{см}^3$ , а температура — в эВ.)  $E_D$  есть поле, при котором электрон с энергией  $mu^2/2 = T_e$  удваивает свою скорость за время электрон-электронного столкновения. Введем также критическую скорость  $v_{кр}$  пробного электрона, определив ее как скорость, при которой сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, равна (с противоположным знаком) силе динамического трения:

$$eE = \langle F_T(u = v_{кр}) \rangle, \quad v_{кр} = v_{Te} \sqrt{E_D/E}. \quad (2.4)$$

Критическая скорость делит электронную функцию распределения на две принципиально отличающиеся части. Электроны со скоростями  $v < v_{кр}$  образуют стационарную, близкую к максвелловской функцию распределения, а электроны с  $v > v_{кр}$  не удерживаются силой трения и переходят в режим непрерывного ускорения, образуя пучок ускоренных электронов. В области  $v \sim v_{кр}$  происходит деформация электронной функции распределения из симметричной в направленную.

\* Отметим, что критическое, используемое в работе Драйсера [12], в два раза меньше  $E_D$ .

Как уже говорилось выше, установки токамак, как правило, работают в режимах слабого электрического поля, когда  $E/E_D \ll 1$ . В этих условиях в режим непрерывного ускорения уходят лишь надтепловые электроны с  $v \gg v_{Te}$ , так что для нахождения функции распределения таких электронов достаточно воспользоваться упрощенным кинетическим уравнением с линеаризованным интегралом столкновений, не учитывающим взаимные столкновения быстрых частиц. В полностью ионизованной безграничной плазме с  $z = 1$ , помещенной в однородное постоянное электрическое поле  $E$ , это уравнение удобно записать в сферических координатах:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \nu_e(v) \left[ \frac{T_e}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + vf \right] \right\} + \frac{v(v)}{2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\theta$  — угол между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{v}$ ;  $\nu_e(v)$  — частота соударения быстрого электрона, имеющего скорость  $v \gg v_{Te}$ , с другими электронами плазмы:  $\nu_e(v) = \frac{4\pi e^4 n_e}{m^2 v^3} \ln \left( \frac{mv^2 D}{e^2} \right)$ ;  $D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_e}}$  — дебаевский радиус;  $v(v) = \nu_i(v) + \nu_e(v) \left( 1 - \frac{T_e}{2mv^2} \right)$ ;  $\nu_i(v)$  дается такой же формулой, как и  $\nu_e$  с заменой  $n_e$  на  $n_i$ . Изменением логарифмического члена в  $\nu_e$  и  $\nu_i$  будем в дальнейшем пренебрегать, полагая под логарифмом  $mv^2 = m v_{Te}^2 E_D / E$ .

Для дальнейшего удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\mu = \cos \theta, \quad u = v / \sqrt{T_e / m}, \quad \tau = \nu_e \left( \sqrt{\frac{T_e}{m}} \right) t.$$

Уравнение (2.5) в этих переменных принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{E}{E_D} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1 - \mu^2}{u} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) = \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u} + f \right\} + \frac{1 - 1/4u^2}{u^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu}. \quad (2.6)$$

Первый член в правой части (2.6) описывает изменение модуля скорости или энергии быстрого электрона при соударении с другими электронами (изменение энергии электрона при соударении с ионами, как известно, очень мало). Второй член описывает изменение направления импульса при столкновениях как с электронами, так и с ионами.

Аналитическое решение уравнения (2.6) в области  $v \leq v_{кр}$  было впервые получено в работе А. В. Гуревича [13]. Им было предложено в стационарном случае ( $\partial f / \partial \tau = 0$ ) искать решение (2.6) в виде

$$f = C \exp \{ \varphi(u, \mu) \},$$



где  $C$  — некая константа, определяемая условиями нормировки. Функция  $\varphi(u, \mu)$  должна тогда удовлетворять следующему нелинейному уравнению:

$$\begin{aligned} u^2 \frac{E}{E_D} \left[ \mu u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \\ - u \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2 \left( 1 - \frac{1}{4u^2} \right) \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \\ - \left( 1 - \frac{1}{4u^2} \right) (1 - \mu^2) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Прежде чем переходить к решению уравнения (2.7), рассмотрим качественно поведение электронной функции распределения в плазме с продольным электрическим полем. Под действием поля электроны приобретают дополнительную, направленную по полю скорость, которая затем перераспределяется между другими направлениями за счет электрон-электронных и электрон-ионных столкновений. В слабом электрическом поле ( $E \ll E_D$ ) в области тепловых скоростей функция распределения естественно близка к максвелловской. В этих условиях основной вклад в перераспределение электронов вносят электроионные столкновения, приводящие к изотропизации электронной функции распределения в этом интервале скоростей.

При высоких скоростях частота столкновений падает и вследствие этого из-за действия электрического поля функция распределения начинает отклоняться от максвелловской. Наиболее существенными в этих условиях оказываются соударения между электронами, приводящие в основном к изменению модуля скорости. Действительно, поскольку градиент максвелловской функции распределения растет по модулю с ростом скорости ( $df/du \sim uf$ ), то первый член в правой части (2.6) начинает превышать второй член, описывающий изотропизацию электронной функции распределения. Поэтому при больших значениях  $u$ , когда соударения редки и электрическое поле может на длине пробега существенно увеличить компоненту скорости  $u_z$ , это направление в пространстве скоростей должно быть существенно выделенным, так что распределение электронов должно приобрести направленный характер.

Учитывая отмеченную особенность функции распределения в области высоких скоростей, естественно искать решение уравнения (2.7) в виде ряда по степеням вблизи значения  $\mu = 1$ , т. е. вблизи оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \varphi(u, \mu) = \varphi(u, 1) + (\mu - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \Big|_{\mu=1} + \\ + \frac{(\mu - 1)^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \Big|_{\mu=1} + \dots = \varphi_0(u) + (\mu - 1) \varphi_1(u) + (\mu - 1)^2 \varphi_2(u) + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя разложение (2.8) в уравнение (2.7) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $(\mu - 1)$ , приходим к следующей системе зацепляющихся уравнений для функций  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ :

$$\begin{aligned} u^3 \frac{E}{E_D} \frac{d\varphi_0}{du} - \left( \frac{d\varphi_0}{du} \right)^2 - \frac{d^2 \varphi_0}{du^2} - u \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) \frac{d\varphi_0}{du} + 2 \left( 1 - \frac{1}{4u^2} \right) \varphi_1 = 0; \\ u^3 \frac{E}{E_D} \left( \frac{d\varphi_0}{du} + \frac{d\varphi_1}{du} \right) - 2u^2 \frac{E}{E_D} \varphi_1 - 2 \frac{d\varphi_0}{du} \frac{d\varphi_1}{du} - \\ - \frac{d^2 \varphi_1}{du^2} - u \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) \frac{d\varphi_1}{du} + 2 \left( 1 - \frac{1}{4u^2} \right) (\varphi_1 + \varphi_1^2) + \\ + 8 \left( 1 - \frac{1}{4u^2} \right) \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение системы (2.9) в области  $u^2 < E_D/E$  было получено А. В. Гуревичем [13] путем последовательного обрывания цепочки уравнений. Поскольку при  $u^2 < E_D/E$  функция распределения еще не сильно отличается от симметричной, то в качестве первого приближения можно положить  $\varphi_1 = 0$ . Опуская для простоты малые члены (порядка  $1/u^2$ ), имеем

$$\varphi_0^{(1)} = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \frac{E}{E_D}. \quad (2.10)$$

В следующем приближении, полагая  $\varphi_2 = 0$ , находим  $\varphi_0 = \varphi_0^{(1)} + \varphi_0^{(2)}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)}$ , где

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(2)} = -\sqrt{\frac{2E_D}{E}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{E}{2E_D} u^2 \right)^{1/2} \right]; \\ \varphi_1^{(1)} = u^2 \left[ \frac{F}{2E_D} \left( 1 - \frac{E}{E_D} u^2 \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

и т. д. Как уже отмечалось выше, полученное решение справедливо при  $1 \ll u \ll E_D/E$ . Если оценить сходимость ряда последовательных приближений, то нетрудно показать, что разложение идет по степеням малого параметра  $\sqrt{E/E_D}$  (при  $u^2 < E_D/E$ ).

Таким образом, стационарная функция распределения в области высоких энергий ( $v_{Te}^2 < v^2 \lesssim v_{кр}^2$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} f(v, \theta) \approx \frac{n_e}{(V\pi v_{Te})^3} \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2T} + \frac{E}{E_D} \frac{mv^2}{T} - \left( \frac{2E_D}{E} \right)^{1/2} \times \right. \\ \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{E}{E_D} \frac{mv^2}{T} \right)^{1/2} \right] - \left( \frac{E}{2E_D} \right)^{1/2} \frac{mv^2}{T} \left( 1 - \right. \\ \left. - \frac{E}{E_D} \frac{mv^2}{T} \right)^{1/2} (1 - \cos \theta) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что в области тепловых скоростей электронная функция распределения близка к максвелловской; в области больших скоростей  $f_e$  значительно от нее отличается: с ростом скорости  $f_e$  падает существенно медленнее максвелловской. Кроме того, в области больших скоростей функция распределения (2.12) принимает направленный характер. Наиболее ярко это выражено при  $v^2 = \frac{2T}{m} \frac{E_D}{3E}$ . Средний разброс по углам

$$\bar{\theta} = \int \theta f(v, \theta) d\theta / \int f(v, \theta) d\theta$$

в этом случае минимален

$$\bar{\theta}_{\text{мин}} = \left( \frac{27\pi^2}{8} \right)^{1/4} \left( \frac{E}{E_D} \right)^{1/4}. \quad (2.13)$$

Интересно отметить, что и при больших скоростях (близких к границе убегания) направленность функции распределения уменьшается.

Как уже говорилось выше, решение, полученное А. В. Гуревичем [13], справедливо лишь в области  $v < v_{\text{кр}}$ . Связано это с выбором приближения  $\varphi_1/\varphi_0 \ll 1$ , предполагающим достаточно большую симметрию функции распределения по  $\theta$ . В работе А. Н. Лебедева [14] было получено решение системы (2.9) для области  $v > v_{\text{кр}}$  ( $u^2 > E_D/E$ ). При этом считалось, что  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  одного порядка малости, а  $\varphi_2 \ll \varphi_0, \varphi_1$ . В результате А. Н. Лебедевым было получено следующее выражение для  $f_e$ , справедливое при  $v \geq v_{\text{кр}}$ :

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 \exp(\varphi_1(u^2) + \varphi_2(u^2)(\mu - 1)); \\ \varphi_1(u^2) &\simeq \ln E_{i1} \left( \frac{1}{u^2} \right); \\ \varphi_2(u^2) &= u^2 \frac{2E}{E_D} E_{i1}^{-1} \left( \frac{1}{u^2} \right) \exp \left( -\frac{1}{u^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Для получения нормировочной константы необходимо сшить решение (2.14) с решением А. В. Гуревича в области  $u^2 < E/E_D$ . После этого можно окончательно записать решение (2.14):

$$f = 2^{5/6} (2\pi)^{-3/2} v_{Te}^{-3} \sqrt[4]{\frac{E_D}{E}} \exp \left[ -\frac{E_D}{4E} - \sqrt{\frac{2E_D}{E}} - \frac{1}{2} + \varphi_1(u^2) + \varphi_2(u^2)(\mu - 1) \right]. \quad (2.15)$$

Зная значение функции распределения в области убегания, можно найти поток убегающих электронов  $S$ , т. е. долю числа электронов, уходящих в режим непрерывного ускорения в единицу времени.

Для этого прежде всего проинтегрируем (2.15) по пространству поперечных скоростей, т. е. найдем значение одномерной функции распределения в области убегания:

$$f_z \approx \frac{E_D}{E} 2^{4/3} \frac{n}{\sqrt{\pi} v_{Te}} \sqrt[4]{\frac{E_D}{E}} \exp \left[ -\frac{E_D}{4E} - \sqrt{\frac{2E_D}{E} - \frac{1}{2}} \right]. \quad (2.16)$$

Далее подставим (2.16) в (2.5) и проинтегрируем его по  $v_z$  от  $-\infty$  до  $v_0 \gg v_{кР}$ . С учетом того, что кулоновские столкновения сохраняют число частиц (а при  $v_z > v_0$  частота столкновений исчезающе мала), можно получить поток  $S$ :

$$S \approx 2^{1/3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} n v_{ee} \sqrt[4]{\frac{2E_D}{E}} \exp \left[ -\frac{E_D}{4E} - \sqrt{\frac{2E_D}{E} - \frac{1}{2}} \right]. \quad (2.17)$$

Следует отметить, что впервые поток убегających электронов был получен в работе [13] и отличался от выражения (2.17) лишь предэкспоненциальным множителем. Со времени получения выражения (2.17) было предпринято много попыток уточнения величины  $S$  с целью приблизить его к полученному численными методами потоку [15].

Дело в том, что в работе А. Н. Лебедева [14] [уравнение (2.17)] нельзя считать корректной процедуру сшивки решения, поскольку области их применимости не перекрываются. Наиболее последовательно решение для  $f_e$  и  $S$  было впервые получено в работе [16] разбиением скоростного пространства на пять интервалов, внутри каждого из которых находилось приближенное выражение для функции распределения с использованием своих параметров малости. Обобщение решения [16] на случай плазмы с отличным от единицы эффективным зарядом ионов дано в работе [17]. Наконец, в работе [18] было исследовано влияние релятивизма на поток  $S$ .

В настоящее время общепринятым является следующее выражение для потока убегания:

$$\Gamma = \frac{S}{v_e n_e} = K(z_i) \left( \frac{E_D}{E} \right)^{\frac{3}{16} (z_i + 1)} \exp \left[ -\frac{E_D}{4E} - \sqrt{\frac{(z_i + 1) E_D}{E}} \right], \quad (2.18)$$

где  $z_i = \frac{1}{n_e} \sum_j z_{ij}^2 n_{ij}$ ;  $K$  — величина порядка единицы.

Как уже отмечалось выше, все полученные в более поздних работах выражения для потока убегания (без учета эффективного заряда) лишь предэкспоненциальным фактором отличаются от результата А. В. Гуревича [13]. Следует, однако, помнить, что входящая в экспоненту (2.18) величина  $E_D$  известна лишь с логарифмической точностью, поскольку с такой точностью описывается кулоновский логарифм для столкновений быстрых электронов. Поэтому в определенной степени

уточнение предэкспоненциального фактора в формуле для потока убегания является превышением точности.

**Задача.** Найти на основе одномерной модели функцию распределения для убегających электронов [19].

Одномерное кинетическое уравнение может быть получено из трехмерного кинетического уравнения со столкновительным интегралом в форме Ландау интегрированием его по поперечным скоростям. Для электронов со скоростями выше тепловой оно принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f_z}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z} v_0 \frac{v_{Te}^3}{|v_z^3|} \left( v_z f_z + \frac{T_e}{m} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right) + A \delta(v_z). \quad (2.19)$$

В правую часть (2.19) введен источник частиц. Мощность этого источника (величина  $A$ ) заранее неизвестна и будет найдена ниже из условия существования стационарного решения (ясно, что в задаче с убеганием стационарное решение может быть получено лишь при условии существования постоянного источника частиц). Граничными условиями для уравнения (2.19) является  $f_z(v_z = -\infty) = 0$  и  $f_z(v_z = +\infty) = \text{const}$ . Последняя константа связана естественно с величиной  $A$  и в конечном счете с отношением  $E_D/E$ . Проинтегрируем уравнение (2.19) по  $v_z$  от  $-\infty$  до  $v_z > 0$ :

$$\frac{eE}{m} f_z = v_0 \frac{v_{Te}^3}{|v_z^3|} \left( v_z f_z + \frac{T_e}{m} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right) + A. \quad (2.20)$$

При  $v_z \rightarrow +\infty$  первым членом в правой части (2.20) можно пренебречь, так что получаем связь между  $A$  и  $f_z(v_z = +\infty)$ :

$$\frac{eE}{m} f_z(v_z = +\infty) = A. \quad (2.21)$$

Проинтегрировав уравнение (2.20) по  $v_z$  еще раз, получим с использованием условия ограниченности функции распределения при  $v_z \rightarrow +\infty$ :

$$f_z(v_z > 0) = \frac{A}{v_0 u} \left[ 1 + \sqrt{\frac{2v_{Te}}{u}} \exp(\rho^2) \int_{\rho}^{\infty} \exp(-z^2) dz \right];$$

$$\rho = \sqrt{\frac{u}{2v_{Te}}} \left( \frac{v_z^2}{v_{Te}^2} - \frac{v_{Te}}{u} \right) = \sqrt{\frac{v_{Te}}{2u}} \left( \frac{v_z^2}{v_{кр}^2} - 1 \right); \quad (2.22)$$

$$u = \frac{eE}{mv_0}, \quad v_{кр}^2 = \frac{v_{Te}^3}{u}.$$

В области  $|v_z| < v_{кр}$  функция распределения становится максвелловской. Из условия нормировки (приближенно можно считать, что полученное решение справедливо и при  $|v_z| \leq v_{Te}$ )  $f_z(0) = n_e/\sqrt{\pi v_{Te}}$  получим

$$A = \frac{v_0 u n_e}{\pi v_{Te}} \sqrt{\frac{u}{2v_{Te}}} \exp\left(-\frac{v_{Te}}{2u}\right). \quad (2.23)$$

Как следует из (2.21), значение  $A$  дает величину потока электронов в область убегания, и наконец, из (2.23) и (2.22) можно получить выражение для электронной функции распределения в области  $v_z \geq v_{кр}$ :

$$f_z(v_z \geq v_{кр}) \approx \frac{A}{v_0 u} \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_z^2} \right) = \frac{n_e}{\pi v_{Te}} \sqrt{\frac{u}{2v_{Te}}} \exp\left(-\frac{E_D}{4E}\right) \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_z^2} \right). \quad (2.24)$$

### § 3. Траектории ускоренных электронов в токамаке

В этом параграфе будет рассмотрено влияние реальной геометрии токамака на динамику ускоренных электронов. Прежде всего остановимся на динамике свободных электронов в токамаке. Это электроны с энергией диапазона  $> 1$  МэВ; они практически не испытывают соударений и ускоряются электрическим полем до релятивистских энергий\*. Именно эта группа электронов ответственна за экспериментально наблюдаемое на токамаках коротковолновое рентгеновское излучение. В определенных случаях такие электроны приводят к

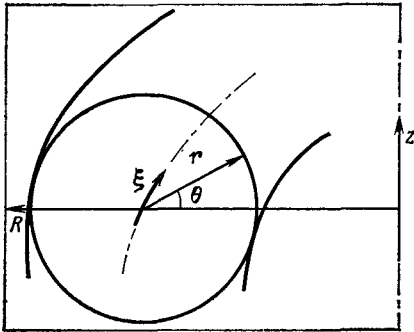


Рис. 1. Тороидальная система координат

рождению потока нейтронов, вызванных фотоядерными реакциями [2].

Рассмотрим прежде всего процесс ускорения электронов в тороидальном электрическом поле. Движение электронов вдоль тороидальной оси  $\xi$  (рис. 1) описывается следующим уравнением:

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_0 v_\xi) = -e E_\xi \quad (3.1)$$

или

$$\frac{d}{dt} \gamma \beta = \frac{e}{m_0 c} \frac{dA_\xi}{dt}; \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

где  $\beta = v_\xi/c = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$ ;  $A_\xi$  — тороидальная компонента векторного потенциала. Решение (3.1) получается непосредственно

$$W = m_0 c^2 (\gamma - 1); \quad \beta^2 = \left( \frac{e E_\xi t}{mc} \right)^2 \left/ \left( 1 + \frac{e E_\xi t}{mc} \right)^2 \right.; \quad (3.2)$$

$$\gamma(t) = \left\{ 1 + \left[ \frac{e}{m_0 c} A_\xi(t) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.3)$$

Величина векторного потенциала в (3.3) пропорциональна изменению магнитного потока, охватываемого траекторией электрона. Ясно, что изменение энергии быстрого электрона приводит и к изменению его траектории, так что в конечном счете она пересечет диафрагму. Эта траектория является для электрона предельной; с ней связана максимальная энергия, с которой электрон еще может удерживаться в разряде. Для того чтобы оценить эту энергию, рассмотрим движение электрона в токамаке в дрейфовом приближении (движение ведущего

\* Приведенные ниже оценки не описывают естественно случай, когда релятивистские электроны покидают плазму за счет вызванных МГД активностью разрушений магнитных поверхностей.

центра). В токамаке такое движение, как известно, [20], описывается следующим уравнением:

$$\mathbf{v}_{др} = e_{\theta} v_{\theta} + e_{\xi} v_{\xi} + v_g e_z, \quad (3.4)$$

где  $v_{\theta} = v_{\parallel} B_{\theta}/B_0$  — движение по оси  $\theta$  за счет винтовости магнитного поля;  $v_g = \frac{1}{mR\omega_{Be}} \left( v_{\parallel} p_{\parallel} + \frac{1}{2} v_{\perp} p_{\perp} \right)$  — вертикальный дрейф электронов за счет центробежной силы и градиента тороидального магнитного поля (система координат показана на рис. 1). Анализ уравнения (3.4) показывает, что для однородного распределения тока  $j(r) = \text{const}$  пролетные электроны в плоскости  $R, z$  движутся по окружности с центром, смещенным по  $R$  на величину  $\Delta$  относительно магнитной поверхности, которая также предполагается окружностью. Для оценки смещения электронов можно воспользоваться тем, что изменение их энергии под влиянием продольного электрического поля за время одного оборота по тору мало. В этом случае приближенно сохраняется продольный адиабатический инвариант:

$$J = \gamma m_0 R v_{\xi} - \frac{e}{c} \int_0^r B_{\theta} R dr. \quad (3.5)$$

В (3.5)  $R = R_0 + r \cos \theta$ . Когда абсолютная величина смещения  $\Delta$  мала по сравнению с текущим радиусом  $r$ , можно считать, что  $r = r_0 + \Delta \cos \theta$ , где  $r_0$  — радиус магнитной поверхности. Тогда  $B_{\theta}(r_0) \approx B_{\theta}(r) - \Delta \cos \theta \left. \frac{\partial B_{\theta}}{\partial r_0} \right|_r$  и из (3.5) следует, что в простейшем случае однородного распределения тока смещение  $\Delta$  описывается соотношением

$$\Delta = \frac{a^2}{2R_0} \frac{I_A}{I}, \quad (3.6)$$

где  $a$  — радиус диафрагмы (токовый радиус);  $I_A = \beta \gamma m_0 c^3 / e = 17 \sqrt{\gamma^2 - 1}$  [кА] — альфеновский ток. Из (3.6) с учетом того, что  $\Delta_{\text{макс}} = a$ , следует оценка максимальной энергии электрона, удерживаемого в токамаке с данным током:

$$\begin{aligned} (\beta \gamma)_{\text{макс}} &= \frac{eI}{m_0 c^3} 2 \frac{R_0}{a}; \\ \gamma^2 - 1 &< \frac{4}{17} I^2 \left( \frac{R_0}{a} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.2) и (3.7) можно также оценить максимальное время удержания релятивистских электронов в токамаке на стационарной стадии разряда, когда  $E_{\xi} = \text{const}$ :

$$\tau_{\text{макс}} \approx \frac{2}{17} \frac{Imc}{eE} \frac{R}{a} = \frac{R^2}{a} \frac{I}{V} 10^{-5}. \quad (3.8)$$

Здесь величина тока дана в кА, а электрическое поле в В/см.

Из (3.8), например, следует, что в токамаке Т-10 с параметрами  $R_0 = 150$  см,  $a = 30$  см,  $I = 400$  кА,  $V = 2$  В время удержания релятивистских электронов составляет  $\tau_{\text{макс}} = 1,5$  с, что сравнимо с временем поддержания тока.

Напомним, что оценки (3.7) и (3.8) получены для электрона, находящегося в начальный момент времени (при  $v_{\parallel} = 0$ ) в центре шнура  $r(0) = 0$ . Для электронов с  $r(0) = r_0$  в соотношениях (3.7) и (3.8) величину  $a$  нужно заменить  $a - r_0$ .

Следует также заметить, что пикированное распределение тока лучше удерживает частицы, чем рассмотренный выше случай однородного тока.

И наконец, рассмотрим влияние неоднородности магнитного поля в токамаке на движение ускоренных электронов. В идеальном токамаке (т. е. в токамаке с постоянным по оси  $\xi$  магнитным полем) из-за наличия тока магнитное поле меняется вдоль силовой линии — в такой системе существует группа частиц, запертых в области минимума магнитного поля, т. е. на внешней стороне тора. Из закона сохранения магнитного момента электрона ( $\mu = p_{\perp}^2/B = \text{const}$ ) и его энергии  $\varepsilon = mc^2$  следует, что запертыми будут частицы, для которых выполнено неравенство  $p_{\parallel}^2/p_{\perp}^2 < (B_{\text{макс}} - B_{\text{мин}})/B_{\text{макс}} \leq r/R = \varepsilon$ . Такие частицы движутся в токамаке по банановым траекториям [21], отклоняясь от магнитной поверхности на  $\Delta_z \leq \Delta/\sqrt{\varepsilon}$ .

Проще всего смещение найти для слабозапертых электронов, для которых можно считать, что  $p_{\parallel}(\theta) \approx p_{\parallel}(0)(1 + \cos\theta)/2$ ,  $p_{\parallel}(0) \leq p\sqrt{\varepsilon}$ . При этом соотношение  $\Delta r_z = \Delta/\sqrt{\varepsilon}$  следует непосредственно из (3.5). Они, естественно, не вносят вклад в поток убегания. Однако число таких быстрых частиц сравнительно невелико прежде всего в силу того, что это частицы с большой поперечной энергией, а как было показано выше, убегающие электроны, как правило, имеют продольную энергию больше поперечной. Правда, количество таких частиц может резко возрасти при развитии кинетической неустойчивости, приводящей к упругому развороту частиц в пространстве скоростей (см. ниже).

В реальном токамаке из-за дискретности катушек продольного магнитного поля существуют еще так называемые суперзапертые частицы, т. е. частицы, запертые в локальных минимумах продольного магнитного поля (для них выполнено неравенство  $p_{\parallel}^2/p_{\perp}^2 \leq \delta = \Delta B_{\xi}/B_{\xi}$ , где  $\delta$  — глубина гофрировки тороидального магнитного поля). Такие частицы в отличие от запертых не удерживаются в токамаках, поскольку для них отсутствует вращательное преобразова-

ние, и вертикальный дрейф со скоростью  $v_g = \frac{v_{\parallel} p_{\parallel} + v_{\perp} p_{\perp} / 2}{mR\omega_{Be}}$  должен

приводить к выносу их из токамака за время  $\tau_b \approx a/v_g \approx aR\omega_{Be}/(v_{\parallel} p_{\parallel} + v_{\perp} p_{\perp} / 2)$ . Следует, конечно, помнить, что реально будут уходить из системы лишь достаточно быстрые электроны, для которых время  $\tau_b$  меньше характерного времени их «выбивания» из конуса запертости за счет электрон-электронных и электрон-ионных столк-



новений  $\tau_{cT}$ . Последняя величина оценивается как  $\tau_{cT} \approx \delta / [v_{ee}(v) + v_{ei}(v)]$ . Из условия  $\tau_B < \tau_{cT}$  можно оценить характерную энергию суперзапертых электронов, начиная с которой они покидают систему за счет вертикального дрейфа:

$$\left(\frac{v}{v_{Te}}\right)^2 \geq \left[ \frac{aR\omega_{Be}(v_{ee}(T_e) + v_{ei}(T_e))}{v_{Te}^2 \delta} \right]^{2/5}, \quad (3.9)$$

$v_{ee}(T_e)$  и  $v_{ei}(T_e)$  — частоты электрон-электронных и электрон-ионных столкновений для электронов с тепловой энергией. Соотношение (3.9) написано для нерелятивистских электронов. Оценки показывают, что, например, для токамака T-10 при  $n_e = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $B_z = 30 \text{ кГс}$ ,  $a = 30 \text{ см}$ ,  $R_0 = 150 \text{ см}$ ,  $T_e = 1 \text{ кэВ}$  и  $z_{\text{эф}} = 1$  частицы покидают систему, начиная с энергии  $\varepsilon \geq 15 \text{ кэВ}$ . Оценка, аналогичная (3.9), показывает, что такой механизм ухода более существен для ионов, поскольку для последних меньше характерные частоты столкновений  $\nu_{ii}(T_i) \sim 10^{-2} (v_{ee}(T_e) + v_{ei}(T_e))$ .

Отметим, что строгое рассмотрение влияния неоднородности магнитного поля на поток убегания в токамаках, проведенное в работе [22], показало, что экспоненциальный фактор  $G$  ( $S \sim \exp(-G)$ ) слабо меняется по сравнению со случаем однородного поля и выражается следующим соотношением:

$$G = \frac{1}{4} \frac{E_D}{\langle E \rangle} + \sqrt{\langle \bar{B} \rangle \left\langle \frac{1}{B} \right\rangle \frac{(1+z_i) E_D}{\langle E \rangle}}, \quad (3.10)$$

где  $\overline{\langle \rangle}$  означают усреднение по магнитной поверхности.

**Задача.** Оценить влияние близких столкновений на количество убегających электронов в токамаке [23].

Обычно при расчете скорости ухода электронов в режим непрерывного ускорения рассматриваются только далекие столкновения, приводящие к небольшому изменению энергии и импульса пробной частицы (см. § 2). Однако, если время жизни быстрых электронов достаточно велико, скорость ухода в режим ускорения может существенно возрасти благодаря «близким» столкновениям быстрого и медленного электронов, при которых последнему передается энергия  $\Delta W > mv_{кр}^2/2$ . Этот процесс приводит к экспоненциальному росту во времени ускоренных электронов и может существенно изменить поток убегания.

Рассмотрим наиболее благоприятный для процесса размножения случай, когда время жизни ускоренного электрона в токамаке  $\tau_E$  равно времени свободного ускорения до энергии  $W_{\text{макс}}$ , при которой дрейфовое смещение траектории равно радиусу плазменного шнура:

$$\tau_E^{\text{макс}} = \frac{m_0 c}{eE} \gamma_{\text{макс}}, \quad (3.11)$$

где  $\gamma_{\text{макс}} = 0,47I \frac{R}{4a}$  [кА].

Сечение однократного кулоновского взаимодействия двух электронов с передачей энергии больше чем на  $\Delta W$  равно:

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{m_0 c^2}{\Delta W}, \quad (3.12)$$

где  $r_e = e^2/m_0 c^2$  — классический радиус электрона.

Учитывая, что частота столкновений быстрых частиц  $\nu = \sigma n_e c$ , нетрудно получить коэффициент «размножения» ускоренных электронов за время  $\tau_E^{\text{макс}}$ :

$$K = \nu \tau_E^{\text{макс}}. \quad (3.13)$$

Из соотношения (3.13) следует, что в крупномасштабных токамаках типа Т-10 с хорошим удержанием быстрых частиц коэффициент размножения  $K$  может достигать значений  $K > 10$ .

#### § 4. Линейная теория неустойчивости ускоренных электронов

Выше уже говорилось о том, что наиболее ярким экспериментальным проявлением присутствия в токамаках ускоренных электронов была зафиксированная на многих токамаках так называемая «верная» неустойчивость [4, 5, 8—10, 24]. Прежде чем переходить к ее теоретическому описанию, перечислим кратко экспериментально наблюдаемые особенности ее развития.

Наиболее детально эта неустойчивость была исследована на токамаке ТМ-3 [5].

Как правило, неустойчивость развивалась в разрядах с умеренной плотностью ( $n_e \leq 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ) и сравнительно малым током ( $q \geq 6$ ). Неустойчивость проявлялась в виде коротких ( $\tau_1 \approx 10 \div 100 \text{ мкс}$ ) периодических всплесков увеличения диамагнетизма плазмы, причем расстояние между соседними всплесками намного превышало продолжительность каждого из них и составляло  $\tau_2 \sim 1 \text{ мс}$ . Одновременно с изменением диамагнетизма наблюдалось резкое увеличение интенсивности рентгеновского и синхротронного излучения плазмы, менялось напряжение на обходе плазменного шнура (знак  $\Delta V$  был, вообще говоря, различным для разных установок). Каждый всплеск неустойчивости сопровождался возбуждением широкого спектра колебаний с частотами  $\omega_{pi} \leq \omega < \omega_{pe}$ . Одновременно с возбуждением колебаний болометры фиксировали выход на стенку камеры энергичных локально запертых электронов и ионов. Каждый всплеск неустойчивости сопровождался аномальным нагревом ионов, причем приращение ионной температуры  $\Delta T_i$  составляло  $\Delta T_i \sim 1/3 \Delta T_{e\perp}$ , где  $\Delta T_{e\perp}$  —

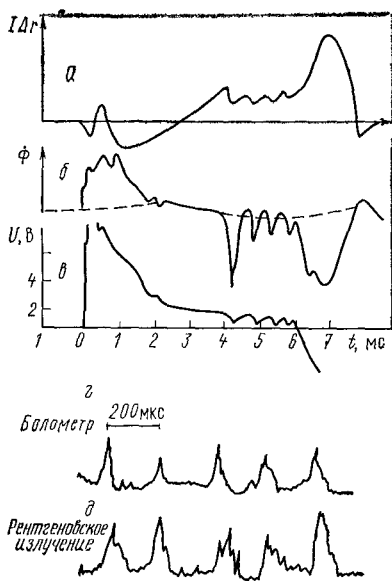


Рис. 2. Экспериментальные проявления «верной» неустойчивости:

а — смещение плазменного шнура; б — диамагнетизм плазмы; в — напряжение на обходе; г — показание болометра; д — коротковолновое рентгеновское излучение

устойчивости сопровождался возбуждением широкого спектра колебаний с частотами  $\omega_{pi} \leq \omega < \omega_{pe}$ . Одновременно с возбуждением колебаний болометры фиксировали выход на стенку камеры энергичных локально запертых электронов и ионов. Каждый всплеск неустойчивости сопровождался аномальным нагревом ионов, причем приращение ионной температуры  $\Delta T_i$  составляло  $\Delta T_i \sim 1/3 \Delta T_{e\perp}$ , где  $\Delta T_{e\perp}$  —

увеличение поперечной (диамагнитной) температуры электронов. Следует подчеркнуть, что с точки зрения теории наиболее странным кажется релаксационный характер неустойчивости. Напомним, что характерное расстояние между соседними всплесками неустойчивости имеет масштаб  $\tau_2 \sim 10^{-3}$  с, в то время как характерный период возбуждаемых колебаний  $f \leq 10^{-10}$  с. Непонятен также «взрывной» характер неустойчивости, при котором время «вспышки» много меньше характерного времени выхода системы к границе устойчивости.

Зависимость перечисленных выше величин от времени на установке ТМ-3 приведена на рис. 2.

Перейдем теперь к теоретическому исследованию устойчивости плазмы со слабым продольным электрическим полем. Выше было показано, что наличие в плазме такого поля приводит к появлению на электронной функции распределения квазиодномерного хвоста убегающих электронов. Наличие такой неравновесности может, вообще говоря, привести к возникновению различных неустойчивостей. Ниже будет рассмотрена наиболее опасная неустойчивость потенциальных колебаний плазмы.

Как и обычно, для нахождения условий начала неустойчивого движения плазмы необходимо провести исследование закона дисперсии интересующих нас колебаний. В рассматриваемом нами случае плазмы, помещенной в сильное магнитное поле  $B_0$  (направленное по оси  $z$ ), закон дисперсии для потенциальных колебаний следует из приравнивания нулю продольной компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon_l$ :

$$\epsilon_l = 1 + \frac{4\pi e^2}{Mk^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{df_i}{d\mathbf{v}} d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} +$$

$$+ \frac{4\pi e^2}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{\left( k_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} + \frac{n\omega_{Be}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\perp}} \right)}{\omega - n\omega_{Be} - k_z v_z + i\nu} J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Be}} \right) dv. \quad (4.1)$$

Здесь  $J_n$  — функция Бесселя;  $\nu$  — положительная, стремящаяся к нулю константа;  $f_i$  — ионная,  $f_e$  — электронная функции распределения.

В области прозрачности, где мнимая часть  $\epsilon_l''$  много меньше действительной  $\epsilon_l'$ , собственная частота  $\omega_{\mathbf{k}}$  определяется уравнением  $\epsilon_l' = 0$ , а из условия  $\epsilon_l = 0$  находится инкремент нарастания малых возмущений  $\gamma_{\mathbf{k}} = -\epsilon_l'' \left( \frac{\partial \epsilon_l'}{\partial \omega} \right)^{-1}$ . Из выражения (4.1) нетрудно найти  $\epsilon_l''$ , а именно:

$$\epsilon_l'' = -\pi \frac{4\pi e^2}{Mk^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v} -$$

$$\begin{aligned}
& -\pi \frac{4\pi e^2}{mk^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Be}} \right) \delta(\omega - n\omega_{Be} - k_z v_z) \times \\
& \times \left( k_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} + \frac{n\omega_{Be}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\perp}} \right) d\mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ниже будет рассмотрен случай сильного магнитного поля, когда везде внутри плазмы выполнено неравенство  $\omega_{Be} > \omega_{pe}$  (такое неравенство выполняется в большинстве режимов работы токамака). Из линейной теории следует [25], что в этом случае в однородной высокотемпературной плазме существует три ветви собственных колебаний:

1) ионно-звуковые с законом дисперсии

$$\begin{aligned}
\omega & \approx kc_s, \quad c_s = \sqrt{T_e/M}; \\
\omega_s & \lesssim \omega_{pi};
\end{aligned} \tag{4.3}$$

2) замагниченные ленгмюровские колебания (мода Тревелписа—Гулда):

$$\begin{aligned}
\omega_l & = \omega_{pe} k_z/k, \\
\omega_{pi} & < \omega_l \leq \omega_{pe}, \\
k_z v_{Te} & < \omega_l;
\end{aligned} \tag{4.4}$$

3) верхнегибридные колебания (бернштейновская мода):

$$\begin{aligned}
\omega_r^2 & = \omega_{Be}^2 + \omega_{pe}^2 k_{\perp}^2/k^2, \\
k_{\parallel} v_{Te} & \leq \omega_{Be}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

вообще говоря, существуют также высшие бернштейновские моды с частотами, близкими к  $n\omega_{Be}$ ; мы не будем их рассматривать по причинам, указанным ниже).

Из выражения для  $\gamma_k$  следует, что для возбуждения колебаний необходимо выполнение неравенства  $\omega \epsilon'' < 0$ . Из (4.2) видно, что к раскачке или затуханию волн приводят лишь те частицы, для которых выполнено условие равенства  $\omega - n\omega_{Be} - k_z v_z = 0$  и  $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_i = 0$ .

Прежде всего отметим, что поскольку функция распределения для ионов максвелловская, то ионный черенковский резонанс приводит к затуханию колебаний. То же относится и к электронному черенковскому резонансу для колебаний, у которых продольная фазовая скорость  $\omega/k_z > v_{Te}$  (в этой области  $\partial f_e/\partial v_z < 0$ ).

Обратимся теперь к доплеровским резонансам, когда  $n \neq 0$ . Прежде всего отметим, что поскольку в рассматриваемом нами случае выполнены неравенства  $\partial f_e/\partial v_{\perp} < 0$  и  $|\partial f_e/\partial v_{\perp}^2| \geq |\partial f_e/\partial v_z^2|$ , то доплеровский резонанс не может приводить к раскачке колебаний с  $\omega \simeq n\omega_{Be}$ . Действительно, в этом случае для резонансных частиц имеем  $k_z v_z =$

$= \omega - n\omega_{Be} \ll \omega$  и из (4.2) следует, что  $\omega \varepsilon_i^n \sim - \int \frac{(n\omega_{Be})^2}{v_{\perp}} \times$   
 $\times \frac{\partial f_e}{\partial v_{\perp}} dv > 0$  (раскачка таких колебаний возможна лишь для функции

распределения с конусом потерь, либо когда продольная температура резонансных частиц много меньше поперечной). Обратимся теперь к колебаниям с  $\omega \ll \omega_{Be}$ . Из (4.2) следует, что для таких колебаний  $k_z v_z = n\omega_{Be}$  и доплеровский резонанс с  $n < 0$  будет приводить к их раскачке при выполнении неравенства  $|\partial f_e / \partial v_z| < |\partial f_e / \partial v_{\perp}|$ , что и реализуется в случае пучка ускоренных электронов [26, 27], когда доплеровский резонанс выполняется для частиц с  $v_z > v_{кр} \gg v_{Te}$ .

Более подробный анализ, основанный на квазилинейной теории (см. § 5) показывает, что для резонанса с  $n < 0$  (так называемый аномальный доплер-эффект) взаимодействие волн с резонансными электронами приводит к уменьшению продольной энергии электронов и увеличению их поперечной энергии, в результате чего система стремится к устойчивому равновесию с изотропной функцией распределения пучка. Для резонанса с  $n > 0$  (нормальный доплер-эффект) ситуация обратная и возбуждение колебаний привело бы к еще большему отклонению системы от равновесия.

Ниже мы остановимся на раскачке пучком замагниченных ленгмюровских колебаний, не анализируя подробно неустойчивость ионно-звуковых. Последние если и возбуждаются, то прежде всего за счет черенковского резонанса на электронах в области  $\omega/k_z \leq u_0 = eE/mv_{ei}$ ; доплеровский вклад в их раскачку от частиц пучка экспоненциально мал и вряд ли может играть заметную роль (если только квазилинейная релаксация в области черенковского резонанса не уменьшит раскачку до уровня, когда важен будет учет доплеровского члена).

Найдем порог раскачки замагниченных ленгмюровских колебаний. Для этого мы должны подставить в выражение для  $\varepsilon_i^n$  полученное ранее [см. (2.16)] выражение для электронной функции распределения и приравнять  $\varepsilon_i^n$  нулю. Однако поскольку нам нужно рассмотреть процесс отрастания хвоста ускоренных электронов во времени, мы должны обрезать функцию распределения ускоренных электронов при  $v_z = v_b(t) = \frac{eEt}{m}$  ( $t$  — время, прошедшее с момента включения поля  $E$ ). С учетом этого обстоятельства можно считать, что:

$$f_1(v_z \geq v_{кр}) \approx \Gamma \frac{n_e}{\pi^{3/2} v_{Te}^3} \frac{E}{E_D} \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_z^2} \right) \theta \times$$

$$\times \left( \frac{v_b(t)}{v_z} - 1 \right) \exp \left( - \frac{v_{\perp}^2}{v_{Te}^2} \right), \quad (4.6)$$

где  $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$  — функция Хевисайда.

Подставим (4.6) в выражение для инкремента раскачки, при этом  $\gamma_k$  оказывается равным

$$\gamma_k = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\omega_k}{v_{Te}} \frac{E}{E_D} \Gamma \left[ -\frac{2v_{кр}^2 |k_z|^3}{\omega_k} + \frac{1}{4} \frac{k_{\perp}^2}{k_z \omega_{Be}} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{k_z^2 v_{кр}^2}{\omega_{Be}^2} \right) \theta \left( \frac{k_z v_b(t)}{\omega_{Be}} - 1 \right) \right]. \quad (4.7)$$

Первый член в правой части (4.7) описывает затухание колебаний в области черенковского резонанса (этот резонанс тоже находится в области убегания  $\omega_k/k_z \geq v_{кр}$ ); второй член в правой части (4.7), написанный в предположении  $\omega_k \ll \omega_{Be}$ , описывает раскачку колебаний на доплеровском резонансе.

На границе устойчивости должны выполняться следующие соотношения:  $\gamma_k = 0$ ,  $\partial \gamma_k / \partial k_z = 0$ ,  $\partial \gamma_k / \partial k_{\perp} = 0$  (последние два условия выделяют колебания, обладающие максимальным инкрементом).

Из этих условий следует, что неустойчивость развивается при превышении скоростью пучка  $v_b$  следующей величины:

$$v_b \geq 3 \left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^{3/2} v_{кр} = v_b^*, \quad (4.8)$$

причем в первую очередь возбуждаются колебания с  $\omega_{Be}/k_z = v_b^*$  и

$$k_{\perp}^2/k_z^2 \approx 3. \quad (4.9)$$

Отметим, что соотношения (4.8), (4.9) получены в предположении достаточно сильного пучка, когда электрон-ионные столкновения не вносят существенного вклада в затухание колебаний. Колебания, определяемые соотношениями (4.8), (4.9), имеют черенковский резонанс в области

$$v_1 = \frac{\omega_k}{k_z} \approx \frac{\omega_{pe}}{k} = \sqrt{3} v_{кр} \left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Если выполняется условие развития неустойчивости (4.8), амплитуда колебаний экспоненциально растет со временем; дальнейшая эволюция неустойчивости с учетом обратного влияния колебаний на функцию распределения резонансных электронов должна описываться квазилинейным приближением.

**Задача.** Найти минимальное значение  $E/E_D$  (минимальную плотность пучка), при которой возможна раскачка неустойчивости.

В высокотемпературной плазме, где нет столкновений, минимальная плотность пучка, при которой развивается неустойчивость, определяется из (4.7), где вместо величины  $\frac{\omega_{Be}}{k_z}$  нужно подставить скорость света, а  $k_{\perp} \approx k$ . Отсюда с условием того, что  $v_{кр}^2 = v_{Te}^2 E_D/E$ , получаем ( $T_e$  выражено в кэВ)

$$\left( \frac{E_D}{E} \right)_{\text{макс}} \approx 10^{-1} \frac{c^2}{v_{Te}^2} \frac{\omega_{pe}^3}{\omega_{Be}^3} \approx \frac{25}{T_e} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^3. \quad (4.11)$$

Еще одним фактором, ограничивающим развитие неустойчивости, могут быть электрон-ионные столкновения. При этом граница устойчивости определяется из уравнения

$$\gamma_{\mathbf{k}} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\omega}{v_{Te}} \frac{E}{E_D} \Gamma \frac{k_{\perp}^2}{4k_z \omega_{Be}} - \nu_{ei}.$$

С учетом (2.18) условие развития неустойчивости

$$\frac{\omega_{pe}^3}{4\omega_{Be}^2} \frac{c}{v_{Te}} K(z_i) \left(\frac{E_D}{E}\right)^{\frac{3}{16}} (z_i+1)^{-1} \exp\left(-\frac{E_D}{4E} - \sqrt{\frac{(z_i+1)E_D}{E}}\right) > \\ \geq \frac{\omega_{pe} \ln \Lambda}{n_e r_D^3} \quad (4.12)$$

или

$$\frac{E_D}{4E} + \sqrt{\frac{(z_i+1)E_D}{E}} \leq \ln \Lambda. \quad (4.13)$$

Для нахождения порога необходимо выбрать минимальное значение  $E_D/E$  из (4.11) и (4.13).

## § 5. Квазилинейная стадия развития неустойчивости

Для описания обратного воздействия возбужденных колебаний на функцию распределения ускоренных электронов необходимо решить систему квазилинейных уравнений. Для бесстолкновительной плазмы она имеет следующий вид [28]:

$$\frac{dW_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} = \int d\mathbf{k} \left( -\frac{\omega_{Be}}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right) D_1 \times \\ \times \left( -\frac{\omega_{Be}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) + \int d\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial v_z} D_0 \frac{\partial f}{\partial v_z}; \quad (5.2)$$

$$D_1 = 4 \left(\frac{\pi e}{m}\right)^2 \frac{W_{\mathbf{k}} k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{Be} - k_z v_z); \quad D_0 = 16 \left(\frac{\pi e}{m}\right)^2 \frac{k_z^2}{k^2} \times$$

$\times W_{\mathbf{k}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z); \quad W_{\mathbf{k}} = \frac{k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{4\pi}$  — спектральная плотность энергии возбужденных колебаний;

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2} \omega_{\mathbf{k}} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d\mathbf{v} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z) \frac{\partial f}{\partial v_z} k_z + \frac{\pi}{8} \omega_{\mathbf{k}} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \times \\ \times \int d\mathbf{v} \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{Be} - k_z v_z) \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \left( k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{\omega_{Be}}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \right) - \nu_{ei}. \quad (5.3)$$

При получении (5.1), (5.2) считалось, что поперечная длина волны больше ларморовского радиуса электронов ( $k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{Be} \ll 1$ ) и учитывались только резонансы с  $n = -1, 0$ . Первый член в правой части (5.2) описывает резонансное взаимодействие ускоренных электронов с колебанием в области аномального эффекта Доплера, а второй — в области черенковского резонанса.

Из уравнения (5.2) можно понять физику возбуждения колебаний на аномальном эффекте Доплера. Из вида квазилинейного оператора в (5.2) следует, что взаимодействие в области аномального эффекта Доплера приводит к диффузии частиц в пространстве скоростей вдоль линий  $(v_z - \frac{\omega}{k_z})^2 + v_{\perp} = \text{const}$ , т. е. они изотропизируются в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны. Если фазовая скорость мала (что и будет предполагаться в дальнейшем и справедливо при  $\omega_{pe} \ll \omega_{Be}$ ), то изотропизация электронов происходит при почти постоянной энергии, т. е. волнам передается лишь малая часть энергии убегающих электронов. Поскольку начальная функция распределения такова, что характерная поперечная энергия частиц пучка много меньше продольной, то развитие неустойчивости должно сопровождаться увеличением поперечной энергии частиц пучка и уменьшением продольной энергии. К такому же выводу приводит квантовомеханическое рассмотрение элементарного акта возбуждения плазмона за счет аномального эффекта Доплера. Действительно, с квантовомеханической точки зрения условие резонанса можно рассматривать как закон сохранения энергии при излучении  $\hbar\omega_k = n\hbar\omega_{Be} + \hbar k_z v_z$ , где  $\hbar\omega_k$  — энергия плазмона,  $n$  — изменение магнитного квантового числа электронов, а  $\hbar k_z v_z \simeq -\frac{1}{2m} [(mv_z - \hbar k_z)^2 - m^2 v_z^2]$  — уменьшение продольной энергии электрона за счет «отдачи» при излучении плазмона с продольным импульсом  $\hbar k_z$ . При аномальном эффекте Доплера ( $n < 0$ ) излучение плазмона ( $\omega_k > 0$ ) сопровождается уменьшением продольной энергии электрона ( $k_z > 0$ ) и увеличением его поперечной энергии ( $n < 0$ ).

Перейдем теперь к количественному описанию квазилинейной стадии развития «всерной» неустойчивости. Отметим прежде всего, что поскольку области черенковского и доплеровского резонансов разнесены в фазовом пространстве, то их можно рассматривать независимо. Качественно линейную и квазилинейную стадию развития неустойчивости можно представить себе следующим образом [29, 30]. При включении вихревого электрического поля на электронной функции распределения начинает отрастать «хвост» ускоренных электронов, т. е. растет величина  $v_b(t)$  [см. (4.6)]. Когда  $v_b$  превысит критическую величину  $v_b^*$  [см. (4.8)], начинают раскачиваться колебания, обладающие максимальным инкрементом. Квазилинейное взаимодействие таких колебаний с резонансными электронами приводит, во-первых, к изотропизации функции распределения в области  $v_z \approx \omega_{Be}/k_z \sim v_b^*$  доплеровского резонанса и, во-вторых, к образованию узкого одномерного плато в области  $v_z = \omega_k/k_z \approx \omega_{pe}/k = v_1$  черенковского резо-



нанса. Нетрудно видеть, что после образования плато в узкой области надтепловых электронов с  $v_z \approx v_1$  становятся неустойчивыми все колебания с  $\omega/k_z \approx \omega_{pe}/k = v_1 - \text{const}$ , так как в выражении для инкремента исчезает член, стабилизирующий неустойчивость. Поскольку условие  $k = \text{const}$  фактически не вносит ограничений на возможную величину  $k_z$  (а для доплеровского резонанса важна именно эта величина), то последующая стадия развития неустойчивости приводит к рождению широкого по  $k_z$  и  $\omega$  спектра колебаний, приводящих к изотропизации практически всего «пучкового» участка электронной функции распределения (рис. 3). Именно этим фактом можно объяснить наблюдаемый на эксперименте резкий «всплеск» неустойчивости, который заканчивается тогда, когда поперечная энергия пучка сравнивается с его продольной энергией. После этого раскачка прекращается и колебания затухают, например, за счет электрон-ионных столкновений.

Дальнейшее развитие процесса во времени можно представить себе следующим образом. Поскольку область скоростей с  $v_z \approx v_1$  (область плато) достаточно узкая, то после исчезновения колебаний участок с одномерным плато за счет столкновительной диффузии быстро релаксирует к равновесному состоянию и декремент затухания колебаний за счет эффекта Черенкова увеличивается до своего начального значения (а члена с раскачкой нет, поскольку в области доплеровского резонанса функция распределения изотропна). Следовательно, система будет «ждать», пока вихревое электрическое поле достаточно ускорит частицы хвоста и создаст необходимую для возбуждения следующего всплеска неустойчивости анизотропию температур. Такая качественная картина находится в согласии с экспериментально наблюдаемым релаксационным характером неустойчивости.

Количественно проследить за динамикой развития неустойчивости во времени можно на основе упрощенной системы, полученной из квазиизотропного уравнения взятием моментов от электронной функции распределения. «Квазиизотропную» часть электронной функции распределения можно описать только двумя моментами — для поперечной  $T_{\perp}$  и продольной  $T_{\parallel}$  температур  $\left( T_{\alpha} = \int_{v_{кр}}^{\infty} \frac{mv_{\alpha}}{2} f d\mathbf{v}; \text{«температура»} \right.$

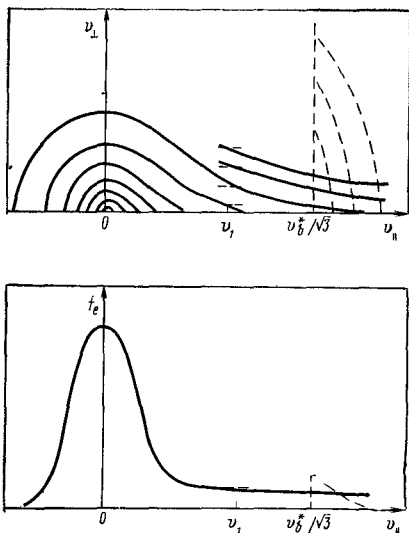


Рис. 3. Изменение электронной функции распределения на первой стадии «всеерной» неустойчивости

это фактически средняя энергия частиц пучка). Умножая последовательно уравнение (5.2) на  $mv_{\perp}^2/2$  и  $mv_z^2/2$  и интегрируя его от  $v_{кр}$  до  $\infty$ , получаем следующие уравнения для моментов [29]:

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = v_T \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \frac{W}{n_e}; \quad (5.4)$$

$$\frac{dT_{\parallel}}{dt} = -v_T \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \frac{W}{n_e} + Q. \quad (5.5)$$

Здесь  $v_T = \omega_{pe}^2 \frac{n_b}{n_e} \langle \frac{1}{v_z} \rangle \ll \frac{1}{k_z} \gg$ ;  $W = \int W_k d_k$  — полная энергия шумов в единице объема;  $\langle \dots \rangle$  — усреднение по спектру;  $\langle \dots \rangle$  — среднее по функции распределения;  $n_e = \int_{v_{кр}}^{\infty} f_e dv$  — плотность пучка.

По порядку величины  $v_T \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}} \frac{n_b}{n_e}$ ;  $Q = eE \langle v_z \rangle$ . К системе (5.4), (5.5) нужно добавить еще уравнение для шумов. Его можно получить, проинтегрировав (5.1) по  $d_k$ . В результате получим

$$\frac{dW}{dt} = \gamma W \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} - \gamma_1 \frac{W}{1 + W/W_T} - v_{ei} W. \quad (5.6)$$

В уравнении (5.6) первый член описывает раскачку колебаний на аномальном эффекте Доплера, второй — затухание Ландау с учетом образования квазилинейного плато при развитии неустойчивости ( $W_T$  — уровень тепловых шумов). По порядку величины  $\gamma \sim \frac{\omega_{pe}^3}{\omega_{Be}} \times \frac{\langle k_z \rangle}{k} \frac{n_b}{n_e} \sim v_T \frac{\langle \omega \rangle}{\omega_{Be}}$  — эта величина содержит лишний множитель  $\omega/\omega_{Be}$  по сравнению с  $v_T$ . Это соответствует тому факту, что рассеяние электронов на колебаниях происходит почти упруго и только в следующем порядке по  $\omega/\omega_{Be}$  появляется член, описывающий изменение числа квантов,  $\gamma_1 \approx \gamma \left( \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right)_{пор} \gg v_{ei}$ ;  $\left( \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right)_{пор}$  — анизотропия температур на пороге неустойчивости.

Система (5.4)–(5.6) описывает следующие процессы, происходящие в плазме. На начальной стадии, когда уровень шумов очень мал ( $W \sim W_T$ ), поперечная температура  $T_{\perp}$  не меняется, а продольная  $T_{\parallel}$  растет (этот рост соответствует ускорению электронов электрическим полем  $E$ ). При выполнении неравенства  $(T_{\parallel} - T_{\perp})/T_{\parallel} > (\gamma_1 + v_{ei})/\gamma$  [см. (5.6)] начинают раскачиваться колебания; с ростом  $W$  растет член  $v_T \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} W$  в уравнениях (5.4), (5.5), описывающий изотропизацию электронной функции распределения в области  $v_z \sim v_b$ . Поперечная температура начинает расти, а продольная — падать. Одновременно начинает уменьшаться второй член в правой

части (5.6), что соответствует образованию плато на надтепловой части функции распределения. Энергия колебания при этом резко увеличивается, происходит изотропизация электронов в пространстве скоростей, в результате чего первый член в (5.6) начинает уменьшаться; когда он станет меньше, чем  $v_{ei}W$ , колебания начинают затухать за счет столкновений. Вслед за уменьшением уровня колебаний происходит быстрая релаксация плато, и для следующего всплеска неустойчивости опять необходимо создать конечную анизотропию температур. Дальше процесс повторяется сначала.

Уравнения (5.4)—(5.6) естественно записать в безразмерных переменных

$$(T_{\parallel} - T_{\perp})/T_{\parallel} = \Delta \tilde{T}; \quad \tilde{W} = W/nT_{\parallel}; \quad \tau = tv_{T},$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma/v_{T}, \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1/v_{T}, \quad \tilde{v}_{ei} = v_{ei}/v_{T},$$

$$\tilde{Q} = Q/(v_{T} nT_{\parallel}); \quad \tilde{W}_T = W_T/nT_{\parallel}.$$

Кроме того, будем предполагать, что изменение температуры пучка меньше ее самой  $\Delta \tilde{T} \ll 1$ , это справедливо во всех всплесках неустойчивости, кроме первого.

В этом случае уравнения для  $\Delta \tilde{T}$  и  $\tilde{W}$  принимают следующий вид:

$$\frac{d}{d\tau} \Delta \tilde{T} = -2\Delta \tilde{T} \tilde{W} + \tilde{Q}; \quad (5.7)$$

$$\frac{d\tilde{W}}{d\tau} = \tilde{\gamma} \tilde{W} \Delta \tilde{T} - \tilde{\gamma}_1 \frac{\tilde{W}}{1 + \tilde{W}/\tilde{W}_T} - \tilde{v}_{ei} \tilde{W}. \quad (5.8)$$

Система (5.7), (5.8) решалась численно при значениях параметров, близких к реализуемым на эксперименте. Однако прежде чем переходить к описанию результатов такого расчета, покажем, что система (5.7), (5.8) имеет автоколебательные решения. Для доказательства этого найдем стационарное решение системы (5.7), (5.8) с возбужденными колебаниями и покажем, что оно неустойчиво. Равновесные значения  $\Delta \tilde{T}_0$  и  $\tilde{W}_0$  равны:

$$\Delta \tilde{T}_0 = \tilde{Q}/2\tilde{W}_0; \quad (5.9)$$

$$\tilde{W}_0 = \frac{\tilde{\gamma}\tilde{Q}/2 - \tilde{\gamma}_1\tilde{W}_T}{\tilde{v}_{ei}}. \quad (5.10)$$

Линеаризуя уравнения (5.7), (5.8) относительно возмущений и учитывая равновесные значения (5.9), (5.10), нетрудно получить дисперсионное уравнение, описывающее поведение во времени малых отклонений от равновесия; из этого уравнения следует, что равновесие неустойчиво при выполнении неравенства

$$\tilde{\gamma}\tilde{Q} < 2\tilde{\gamma}_1\tilde{W}_0 \frac{(\tilde{W}_0/\tilde{W}_T)^2}{(1 - \tilde{W}_0/\tilde{W}_T)^2} \quad (5.11)$$

или в размерных переменных с учетом неравенства  $W_0/W_T \gg 1$ :

$$\gamma Q < 2\gamma_1 v_T W_T. \quad (5.12)$$

Если в (5.12) подставить характерные значения параметров  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ,  $v_T$ ,  $Q$ , то окажется, что автоколебательная неустойчивость должна ослабевать при увеличении магнитного поля и продольного электрического поля (первая зависимость, по-видимому, выполняется на эксперименте). При выполнении неравенства, обратного (5.12), система (5.7), (5.8) не имеет автоколебательных решений. В этом случае в плазме при достаточно большой плотности пучка неустойчивость на anomальном эффекте Доплера будет возбуждена постоянно.

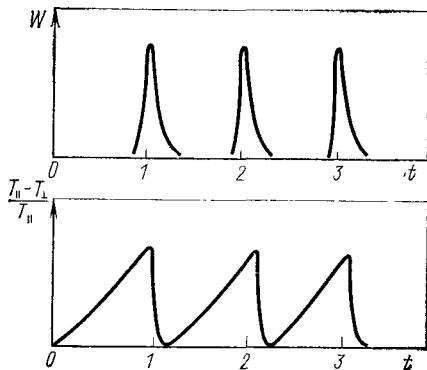


Рис. 4. Результаты численного моделирования веерной неустойчивости

Система (5.7), (5.8) решалась численно при значениях параметров, близких к реализуемым в экспериментах на установке ТМ-3 [5]. Результаты решения показаны на рис. 4. При выбранных значениях параметров характерное время между двумя последовательными всплесками неустойчивости по порядку величины согласуется с полученным экспериментально значением; качественно совпадает также вся картина поведения неустойчивости во времени.

Перейдем теперь к более строгому кинетическому описанию неустойчивости, основанному на анализе уравнения (5.2) [19, 31, 32]. Как было показано выше, неустойчивость возникает при  $v_b \geq 3v_{np} \times (\frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}})^{3/2}$ , причем в первую очередь возбуждаются колебания с  $k^2/k_z^2 \approx 3$ , для которых доплеровский резонанс находится при  $\omega_{Be}/k_z = v_b$ , а ченковский — при  $v_z \approx \frac{\omega_{pe}}{k} =$

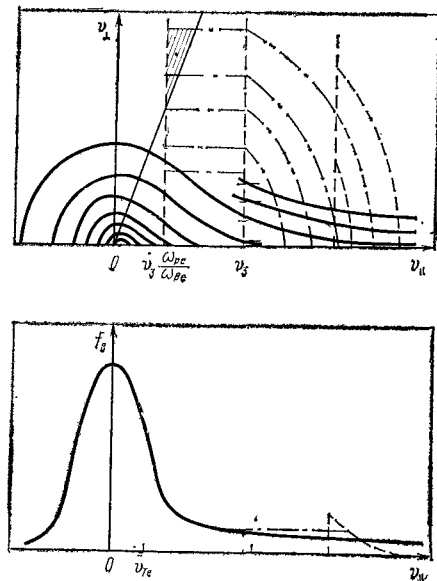


Рис. 5. Изменение электронной функции распределения на второй стадии неустойчивости

$= v_b \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} = v_1$ . При возникновении неустойчивости в области  $v_z = v_1$  быстро образуется одномерное плато, что приводит к раскачке всех колебаний с  $k_z \lesssim k$ , так что резонанс на аномальном эффекте Доплера испытывают все частицы пучка в интервале скоростей  $v_b \sqrt{3}/3 \leq v_z \leq v_b$ . Конечный вид функции распределения в этой области может быть получен из уравнения (5.2) с учетом того, что число частиц вдоль линии  $\eta = v_z^2 + v_\perp^2 = \text{const}$  сохраняется в пределе  $E \rightarrow 0$  (см. [33, 34]):

$$f_e = \frac{1}{V \sqrt{\eta - v_z^2}} \int_{v_z}^{\sqrt{\eta}} f_0(v_z, v_\perp(\eta, v_z)) dv_z \approx$$

$$\approx \Gamma \frac{E}{E_D} \frac{n_e}{V \pi v_{Te} 2\pi} \frac{1 - \exp\left(-\frac{\eta - v_b^2/3}{v_{Te}^2}\right)}{V \sqrt{\eta} (V \sqrt{\eta} - v_b/\sqrt{3})} \theta\left(\frac{v_b}{V \sqrt{\eta}} - 1\right). \quad (5.13)$$

Здесь  $v_z = v_b/\sqrt{3}$  — минимальная скорость, до которой идет процесс релаксации.

Нетрудно видеть, что интеграл от этой функции по поперечным скоростям имеет максимум по  $v_z$  при  $v_z = v_z$ :

$$f_e(v_z) = 2\pi \int_0^{v_b^2 - v_z^2} v_\perp dv_\perp f_e \approx$$

$$\approx \Gamma \frac{E}{E_D} \frac{n_e}{V \pi v_{Te}} \begin{cases} \ln \frac{v_b (1 - 1/\sqrt{3})}{V \sqrt{v_{Te}^2 + v_z^2} - v_b/\sqrt{3}} & \text{при } v_z \geq v_b \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 + \frac{v_{kp}^2}{v_z^2} & \text{при } v_z < v_b \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}. \quad (5.14)$$

Такая функция распределения неустойчива относительно раскачки замагниченных ленгмюровских колебаний в области  $v_z \leq v_z$  за счет эффекта Черенкова. Как обычно [6], квазилинейная релаксация этой неустойчивости сопровождается образованием одномерного плато на электронной функции распределения, причем граничные точки релаксации определяются из закона сохранения числа частиц вдоль траектории и непрерывности функции распределения. Кроме того, конечная функция распределения должна быть одновременно устойчива относительно раскачки колебаний на аномальном эффекте Доплера в области  $v_z \geq v_3$  ( $v_3$  будет определена ниже) и относительно черенковского механизма при  $v_3 \omega_{pe}/\omega_{Be} \leq v_z < v_3$ . Эта функция име-

ет следующий вид (рис. 5):

$$f = \Gamma \frac{E}{E_D} \frac{n_e}{\left(\sqrt{\pi} v_{Te}\right)^3} \times$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_z^2} \right) \exp \left( \frac{v_{\perp}^2}{v_{Te}^2} \right) \text{ при } v_z \leq v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} ; \right.$$

$$\left. \frac{v_{Te}^2 \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_{\perp}^2 + v_3^2} \right) \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{v_{\perp}^2 + v_3^2 \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)}{v_{Te}^2} \right\} \right)}{\sqrt{v_{\perp}^2 + v_3^2} \left( \sqrt{v_{\perp}^2 + v_3^2} - v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \theta \left( \frac{v_b^2}{v_{\perp}^2} - 1 \right) \text{ при } v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} < v_z \leq v_3; \\ \frac{v_{Te}^2 \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{\eta} \right) \left( 1 - \exp \frac{\eta - v_3^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2}}{v_{Te}^2} \right) \theta \left( \frac{v_b^2}{\eta} - 1 \right)}{\sqrt{\eta} \left( \sqrt{\eta} - v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

$$\text{при } v_b \geq v_z \geq v_3.$$

Формула (5.15) получается аналогично (5.13) с использованием закона сохранения числа частиц вдоль траектории:  $\eta = \text{const}$  при  $v_3 \leq v_z \leq \eta \leq v_b$  и  $v_{\perp} = \text{const}$  при

$$v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \leq v_z \leq v_3.$$

Точка  $v_3$  в (5.15) определяется из условия непрерывности интеграла  $\int_0^{\infty} f_{\infty} v_{\perp} dv_{\perp}$  при  $v_z = v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}$ :

$$\ln \frac{v_b^2 + v_3^2}{v_3^2} \approx 2 \frac{v_{кр}^2}{v_3^2} \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}. \quad (5.16)$$

Из (5.16), в частности, следует, что квазилинейная релаксация в отсутствии столкновений (т. е. при достаточно большом количестве ускоренных частиц) идет вплоть до скоростей  $v_z \leq v_{кр}$ .

Выше уже отмечалось, что образующаяся после развития неустойчивости на аномальном эффекте Доплера изотропная часть функции распределения ускоренных электронов по-прежнему неустойчива. Замагниченные ленгмюровские колебания возбуждаются в области больших фазовых скоростей за счет черенковского механизма.

Рассмотрим количественно теорию этого процесса. Прежде всего отметим, что динамика процесса квазилинейной релаксации на этом этапе существенно отличается для двух предельных случаев. Первый — когда пучок ускоренных электронов достаточно однородно распределен по радиусу и вынос колебаний из области локализации пучка несуществен. В обратном предельном случае узкой локализации пучка колебания с групповой скоростью необратимо выходят из зоны раскачки и теряют свою энергию в другой области пространства (например, в холодной плазме периферии шнура). Критерий перехода от одного режима к другому будет приведен ниже.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда конвективный вынос колебаний из зоны локализации пучка несуществен. В диапазоне скорости черенковского резонанса  $v_3 \omega_{pe}/\omega_{Be} \leq v_z \leq v_0 \sqrt{3}/3$  уравнения (5.1), (5.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial f_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_z} D \frac{\partial f}{\partial v_z}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \pi \omega_{pe} |\mu| v_z^2 \frac{1}{n_e} \frac{\partial f_e}{\partial v_z} W. \quad (5.18)$$

Здесь  $D = \pi \frac{e^2}{m^2} \frac{\omega_{pe}^2}{v_z^2} \int_{-1}^1 d\mu |\mu| W \left( \frac{\omega_{pe}}{v_z}, \mu \right);$

$$\mu = \frac{k_z}{k} = \cos \theta, \quad f_z = \int f_e d\mathbf{v}_\perp.$$

Система (5.17), (5.18) отличается от обычной одномерной системы квазилинейных уравнений зависимостью спектральной плотности энергии колебаний от угла в пространстве волновых векторов. Усредняя (5.18) по  $\theta$  ( $\langle W \rangle = \int_{-1}^1 d\mu W$ ) можно стандартным путем получить из уравнений (5.17), (5.18) связь между  $f$  и  $\langle W \rangle$ :

$$f_z(t) - f_z(t=0) = \frac{e^2}{m^2} \omega_{pe} n_e \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\langle W \rangle - \langle W_0 \rangle}{v_z^5}, \quad (5.19)$$

где  $f_z(t=0)$  — изотропная начальная (по отношению к черенковской раскачке) функция распределения резонансных электронов;  $\langle W_0 \rangle$  — начальный уровень шумов. Из соотношения (5.19) сразу следует выражение для  $\langle W \rangle$  в зависимости от  $v_z$  (другими словами, от  $k = \omega_{pe}/v_z$ ):

$$\langle W \rangle = \left( \frac{m}{e} \right)^2 \frac{v_z^5}{2\pi \omega_{pe} n_e} \int_{v_3 \omega_{pe}/\omega_{Be}}^{v_z} (f_z(t) - f_z(t=0)) dv'_z. \quad (5.20)$$

Поскольку конечная функция распределения — плато, то из (5.20) можно заключить, что  $\langle W \rangle \sim v_z^2$ . Для того чтобы определить пове-

дение  $\langle W \rangle$  на левой границе неустойчивости при  $v_z \simeq v_z \omega_{pe} / \omega_{Be}$ , требуется более аккуратное определение пределов интегрирования и разности  $f_z - f_z(t=0)$ , как это обычно делается в одномерной квазилинейной теории [6]. Зависимость  $\langle W \rangle \sim v_z^6$  показывает, что основная часть энергии колебаний сосредоточена в области минимальных  $k \sim \omega_{pe} / v_{z \text{ макс}}$ .

Зная среднее значение спектра колебаний  $\langle W \rangle$ , мы можем оценить и зависимость  $W$  от  $\mu$ . Для этого проинтегрируем (5.18) по времени от 0 до  $\infty$ :

$$W = W_0 \exp(B\mu). \quad (5.21)$$

Здесь  $B = \int_0^\infty dt \pi \omega_{pe} v_z^2 \frac{1}{n_e} \frac{\partial f_z(t)}{\partial v_z}$  — некоторая функция  $v_z$ , получающаяся в результате интегрирования  $\partial f_z / \partial v_z$  по времени (фактически величина  $B$  есть коэффициент усиления колебаний). Поскольку в рамках применимости квазилинейной теории должно быть  $B \gg 1$ , то усредняя (5.21) по  $\mu$ , получим  $\langle W \rangle$ , которое уже известно из предыдущих вычислений [см. (5.20)]:

$$\langle W \rangle = 2 \frac{W_0}{B} (\exp B - 1). \quad (5.22)$$

Если учесть, что  $B \gg 1$ , то из (5.22) нетрудно выразить  $B$  через  $\langle W \rangle$ , а затем и  $W$  через  $\langle W \rangle$ :

$$W = W_0 \exp \left\{ \mu \ln \frac{\langle W \rangle}{W_0} \right\} = W_0 \left( \frac{\langle W \rangle}{W_0} \right)^\mu. \quad (5.23)$$

Из (5.23) следует, что поскольку величина  $\ln \frac{\langle W \rangle}{W_0} \gg 1$ , то спектр возбуждаемых по  $\mu$  колебаний почти одномерный (с полушириной  $\Delta\mu \sim \left( \ln \frac{\langle W \rangle}{W_0} \right)^{-1} \ll 1$ ). Реально спектр по  $\mu$  может быть гораздо шире. Дело в том, что в ограниченной по  $r$  плазме величина  $k_\perp \geq 2\pi/a$  ( $a$  — размер плазмы поперек магнитного поля), т. е.  $\Delta\mu_{\text{мин}} \sim \Delta \frac{k_z}{k_\perp} \sim \frac{1}{k_z^2 a^2} \sim \left( \frac{v_z}{\omega_{pe} a} \right)^2$ . Эта величина, вообще говоря, может быть больше, чем  $\Delta\mu \approx \left( \ln \langle W \rangle / W_0 \right)^{-1}$ . С учетом этого обстоятельства спектр колебаний по  $\mu$  может быть оценен следующим образом:  $W(\mu=1) = 0$ , затем при уменьшении  $\mu$  внутри области  $\mu \geq 1 - \Delta\mu_{\text{мин}}$  интенсивность колебаний увеличивается, а при  $\mu < 1 - \Delta\mu_{\text{мин}}$  быстро (экспоненциально) уменьшается с уменьшением  $\mu$ .

Характерное время квазилинейной релаксации полностью определяется величиной  $\langle W \rangle$  и по аналогии с обычной одномерной теорией [6] может быть оценено как

$$\tau \sim 10^{-1} \Lambda \frac{1}{\omega_{pe}} \frac{n_e}{n_b}. \quad (5.24)$$

Итак, мы выяснили, что в случае абсолютной неустойчивости за



счет эффекта Черенкова преимущественно возбуждаются колебания с  $\mu \approx 1$ , т. е.  $\omega \approx \omega_{pe}$ .

Рассмотрим теперь другой предельный случай узкой области локализации пучка, когда колебания конвективно выносятся из области резонанса (такая ситуация может, например, реализоваться в «трубчатом» пучке; при этом идущие в центр плазмы колебания могут эффективно затухать там за счет механизма Ландау в горячей плазме). Для учета выноса колебаний в уравнение (5.18) следует добавить член  $u_{гр} \frac{\partial W}{\partial r}$ :

$$-\frac{\partial W}{\partial t} + u_{гр} \frac{\partial W}{\partial r} = 2\gamma W, \quad (5.25)$$

где  $u_{гр} = \frac{\partial \omega_k}{\partial k_r} \approx \omega_k \frac{k_r}{k^2} = \omega_{pe} \mu \frac{k_r}{k^2}$ . Вынос колебаний становится существенным, если  $u_{гр} \frac{\partial W}{\partial r} \gg \frac{\partial W}{\partial t}$ . Пользуясь оценкой (5.24), это условие можно переписать следующим образом:

$$\frac{\omega_{pe}}{k} \frac{\tau}{a_b} \sim \frac{v_b \tau}{a_b} \gg 1. \quad (5.26)$$

Здесь  $a_b$  — эффективный радиус пучка. При выполнении сильного неравенства (5.26) в уравнении (5.25) можно пренебречь производной по времени:

$$\frac{\omega_{pe}}{k} \mu \frac{\partial W}{\partial r} = \pi \omega_{pe} \mu v_z^2 \frac{1}{n_e} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} W. \quad (5.27)$$

Уравнение (5.27) (вернее, выражение для групповой скорости  $u_{гр} \approx \frac{\omega_{pe}}{k} \mu$ ) справедливо везде, кроме узкой зоны частот  $\omega \rightarrow \omega_{pe}$  и  $\omega \rightarrow \omega_{pi}$ . Поскольку эти сингулярные точки в неоднородной плазме не могут дать существенного вклада в процесс релаксации, то в дальнейшем мы будем ими пренебрегать. Введем среднюю по области локализации пучка энергию колебаний; из уравнения (5.27) находим

$$W \left( \frac{\omega_{pe}}{v_z}, \mu \right) = W_0 \left( \frac{\omega_{pe}}{v_z}, \mu \right) \exp \left\{ \Gamma_0 v_z \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right\}, \quad (5.28)$$

где  $W_0$  — тепловой (начальный) уровень колебаний. С использованием (5.28) уравнение (5.17) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial f_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_z} B \exp \left( \Gamma_0 v_z \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right) \frac{\partial f_z}{\partial v_z}, \quad (5.29)$$

где  $B = 2\pi \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{v_z^3} W_1$ .

Решение системы (5.28), (5.29) приведено ниже; сейчас рассмотрим, какой спектр колебаний возбуждается при конвективном характере неустойчивости. Из уравнения (5.28) следует, что коэффициент

усиления колебаний  $\Gamma$  не зависит от частоты. Этот факт является следствием того, что  $\Gamma = \gamma/u_{гр}$ , а величина групповой скорости, как и инкремент, пропорциональна  $\mu$ , так что низкочастотные колебания дольше находятся в области локализации пучка (в отличие от случая абсолютной неустойчивости, где время  $\tau$  не зависит от частоты). Это, по-видимому, наиболее существенное отличие конвективной неустойчивости от абсолютной: в первом случае возбуждается широкий спектр колебаний от  $\omega \sim \omega_{pi}$  до  $\omega \sim \omega_{pe}$ , а во втором — колебания локализованы вблизи частоты  $\omega \sim \omega_{pe}$ . Отметим сразу, что возбуждение колебаний с  $\omega \sim \omega_{pi}$  должно приводить к линейному (по  $W/nT$ ) механизму нагрева ионов.

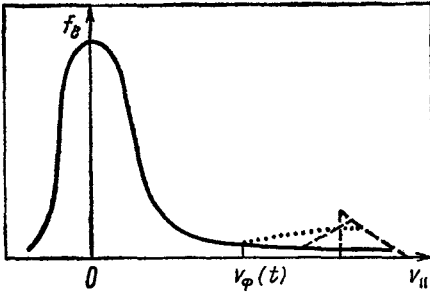


Рис. 6. Релаксация пучка при конвективном характере неустойчивости

**Задача.** Исследовать динамику квазилинейной релаксации пучковой неустойчивости при конвективной неустойчивости.

Система квазилинейных уравнений для этого случая описана выше: (5.28), (5.29).

Ясно, что неустойчивость имеет смысл рассматривать при выполнении неравенства

$$1/\alpha = \Gamma_0 v_z \partial f_z / \partial v_z \gg 1. \quad (5.30)$$

При выполнении сильного неравенства (5.30) (в реальных условиях эксперимента  $1/\alpha \approx 10$ ) уравнение (5.29) можно решать методом последовательных приближений с использованием параметра малости  $\alpha \ll 1$ . Ниже для упрощения будем также считать, что скоростной интервал, внутри которого  $W \neq 0$  достаточно узкий, так что уравнение (5.29) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_z} A \exp \left\{ \Gamma_1 \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right\} \frac{\partial f_z}{\partial v_z}. \quad (5.31)$$

Здесь  $A = B/v_b^3$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_0 v_b$ .

В нулевом приближении по  $\alpha$  из (5.31) следует, что  $\frac{\partial^2 f_z}{\partial v_z^2} = 0$ , т. е.  $f_z = c_1 v_z + c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  являются функциями времени. Для их определения необходимо использовать более высокие разложения по  $\alpha$ . Одну связь между ними можно найти из условия сохранения числа частиц в процессе квазилинейной релаксации. В результате функцию распределения в нулевом приближении можно записать следующим образом:

$$f'_z = \frac{2(v_z - v_\Phi)}{(v_e - v_\Phi)^2} = \frac{f_z}{n_b v_b}. \quad (5.32)$$

Здесь  $f'_z$  нормирована на 1:  $\int_{v_\Phi}^{v_b} f'_z dv_z = 1$ ;  $v_\Phi$  — зависящая (в первом приближении) от времени константа интегрирования, характеризующая положение фронта;  $f'_z$  обращается в нуль; при  $v_z \leq v_\Phi$  (рис. 6). Решение (5.32) справедливо при  $v_\Phi \geq v_s \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}$ ; обратный предельный случай будет рассмотрен ниже. Для опреде-

ления  $v_{\Phi}(t)$  можно использовать уравнение для момента от  $f_z'$ . Подставим (5.32) в (5.31) и проинтегрируем (5.31) по  $v_z$  с весом  $v_z$  от  $v_{\Phi}$  до  $v_b$ :

$$\frac{dv_{\Phi}}{dt} = -\frac{6A}{v_b - v_{\Phi}} \exp \left[ \frac{2\Gamma_1 n_b}{(v_b - v_{\Phi})^2} \right]. \quad (5.33)$$

Уравнение (5.33) имеет решение:

$$(v_b - v_{\Phi})^4 \exp \left[ -\frac{2\Gamma_1 n_b}{(v_b - v_{\Phi})^2} \right] = 24A\Gamma_1 t \quad (5.34)$$

или с использованием (5.28) и (5.34):

$$f_z = \frac{v_z - v_{\Phi}(t)}{\Gamma_1} \ln \frac{v_b^4}{24A\Gamma_1 t}; \quad (5.35)$$

$$W = \frac{W_1}{\mu} \begin{cases} \frac{v_b^4}{24A\Gamma_1 t} & \text{при } v_z > v_{\Phi}; \\ 0 & \text{при } v_z \leq v_{\Phi}; \end{cases}$$

$$v_{\Phi}(t) = v_b - \sqrt{\frac{2\Gamma_1}{\ln v_b^2 / 24A\Gamma_1 t}}. \quad (5.36)$$

Из (5.35), (5.36), в частности, следует, что величина  $df_z/dt$  логарифмически уменьшается во времени, а плотность энергии колебаний уменьшается пропорционально  $t$ . Решение, аналогичное (5.35), (5.36), можно получить и при  $v_{\Phi} < v_s \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}$ . В этом случае  $f_z$  и  $W(v_z)$  будут отличны от нуля во всем интервале  $v_s \omega_{pe} / \omega_{Be} \leq v_z \leq v_b$ ; зависимость их от времени описывается формулами, аналогичными (5.35), (5.36).

Оценим еще степень точности полученного решения. Для этого продифференцируем (5.31) по  $v_z$  и найдем с помощью (5.35), (5.36) отношение отброшенных членов к учтенным:

$$\frac{\partial^2 f_z}{\partial v_z^2} \left( \frac{1}{v_b} \frac{\partial f_z}{\partial v_z} \right)^{-1} \sim \left( \ln \frac{v_b^4}{24A\Gamma_1 t} \right)^{-1} \sim \alpha \ll 1.$$

Из этого неравенства следует, что полученное выше решение справедливо при достаточно большом коэффициенте усиления.

Здесь, по-видимому, следует подчеркнуть основное качественное отличие квазилинейной релаксации неоднородного пучка от рассмотренного ранее случая однородной плазмы. При развитии абсолютной неустойчивости колебания сосредоточивались около  $\mu = 1$ , т. е. спектр был практически одномерным. При конвективной неустойчивости колебания равномерно распределены по всему интервалу частот  $1 \geq \mu \geq \sqrt{m/M}$  ( $\omega_{pi} \leq \omega \leq \omega_{pe}$ ).

## § 6. Макроскопические эффекты, сопровождающие развитие неустойчивости

Выше уже говорилось о том, что всплески неустойчивости сопровождаются экспериментально регистрируемыми макроскопическими изменениями параметров плазмы [4—10, 24]. Во время неустойчивости увеличивается диамагнетизм плазмы, появляются энергичные электроны, запертые в локальных минимумах магнитного поля, изменяется

напряжение на обходе плазменного шнура, увеличивается синхронное излучение и одновременно происходит нагрев надтепловых ионов. Все эти эффекты можно непротиворечиво объяснить в рамках описанной выше теоретической модели.

Изменение многих из перечисленных выше параметров в процессе развития неустойчивости можно описать, используя полученные выше значения электронной функции распределения до неустойчивости и после нее (см. § 5). Так, изменение диамагнетизма плазмы выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\perp} &= 2\pi \int_{\frac{v_z}{\omega_{pe}}}^{\frac{v_b}{\omega_{Be}}} dv_z \int \frac{mv_{\perp}^2}{2} v_{\perp} dv_{\perp} (f_{\infty} - f_0) \approx n_b \frac{mv_b^2}{9} \approx \\ &\approx \frac{2}{3} E_{\parallel} (t=0). \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\text{Здесь } E_{\parallel} (t=0) = \int \frac{mv_{\parallel}^2}{2} f_0 d\mathbf{v}.$$

Таким образом, приращение поперечной энергии намного превышает ее начальное значение и сравнимо с полной энергией пучка. Эта дополнительная энергия экспериментально воспринимается как увеличение диамагнетизма плазмы.

Знание конечной функции распределения позволяет также оценить число электронов, запертых в локальных минимумах тороидального магнитного поля и уходящих из системы за счет тороидального дрейфа. Запирание электронов происходит при выполнении условия:

$$v_z/v_{\perp} \leq \sqrt{\delta B/B}, \quad (6.2)$$

где  $\delta B/B$  — величина неоднородности тороидального магнитного поля, возникающая за счет дискретности создающих его катушек. Интегрируя функцию распределения (5.15) по области фазового пространства, определяемого неравенством (6.2), и учитывая, что пробки занимают долю  $\frac{\delta V}{V}$  полного объема  $V$  плазмы, можно определить количество локально запертых электронов, рождающихся за один всплеск неустойчивости (см. рис. 6)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_b}{n_b} &\approx \frac{\delta V}{V} \frac{2\pi}{n_b} \int_{\frac{v_z}{\omega_{pe}/\omega_{Be}}}^{\frac{v_b}{\omega_{Be}}} dv_z \int_{v_z \sqrt{\frac{B}{\delta B}}}^{\frac{v_b}{\omega_{Be}}} v_{\perp} dv_{\perp} f_{\infty} \leq \\ &\leq \left( \sqrt{\frac{\delta B}{B}} - \frac{v_z}{v_b} \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right) \frac{\delta V}{V}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $v_3/v_b \approx 1/3$  на первой стадии развития неустойчивости и  $v_3/v_b \approx (1/3)(\omega_{pe}/\omega_{Be})^{3/2}$  на второй стадии. Необходимо подчеркнуть, что в системах с  $\delta B/B < 1/3$  (а это условие заведомо выполняется во всех существующих токамаках) локально запертые электроны появляются лишь на второй стадии развития неустойчивости за счет черенковского механизма торможения частиц пучка.

Зная  $f_\infty$ , можно оценить энергию, передаваемую пучком замагниченным ленгмюровским колебаниям:

$$W = \int (f_0 - f_\infty) \frac{mv^3}{2} dv. \quad (6.4)$$

Мы приведем здесь простую оценку для  $W$ . Во-первых, пучок теряет часть своей энергии при развороте на аномальном эффекте Доплера

$$\Delta W_D \approx \frac{\omega}{\omega_{Be}} mn_b v_b^3 < \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} mn_b v_b^3. \quad \text{Во-вторых, пучок теряет энер-$$

гию на возбуждение колебаний на второй стадии неустойчивости за счет черенковского механизма. Эту энергию можно оценить следующим образом. Энергию теряют электроны, продольная скорость которых лежит в интервале  $v_3 \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \leq v_z \leq v_3$ . Общее число таких электронов

$\Delta n_b/n_b \approx v_3/v_b$ , а потеря их энергии  $\Delta W/mn_b v_b^3 \sim (v_3/v_b)^2$ . Можно показать, что в реальных условиях эксперимента в колебания переходит не менее 10% энергии пучка. Поскольку к тому же энергия пучка сравнима с энергией плазмы, то из этой оценки следует, что отношение  $W/n_e T_e \geq 0,1$ . Ясно, что в этих условиях существен учет различных нелинейных процессов, приводящих прежде всего к аномальному нагреву ионов. Подробней этот вопрос будет рассмотрен в § 8, а здесь мы опишем линейный механизм нагрева ионов, который может играть существенную роль, когда неустойчивость носит конвективный характер (как раз в этих условиях нелинейные механизмы не существенны, поскольку колебания не накапливаются в плазме). Как было показано выше, при конвективном характере неустойчивости в плазме возбуждается широкий спектр колебаний от  $\omega \geq \omega_{pi}$  до  $\omega \leq \omega_{pe}$ . С ионами будут взаимодействовать лишь такие колебания, для которых выполнено неравенство  $\omega/k \leq 4v_{Ti}$ . Поскольку для существования замагниченных ленгмюровских колебаний должно быть выполнено условие  $\omega/k_z \approx \omega_{pe}/k > v_{Te}$ , то ясно, что с ионами могут взаимодействовать лишь колебания с частотой, близкой к  $\omega_{pi}$ . Из этого факта сразу следует, что колебания, рождающиеся за счет аномального эффекта Доплера, взаимодействовать с ионами не могут, поскольку в противном случае для них будет выполнено неравенство,  $\omega_{pi}/k_z >$

$> v_{Te}$  и, следовательно,  $\frac{\omega_{Be}}{k_z} > v_{Te} \frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{M}{m}}$ . Последняя величина, как правило, больше скорости света.

Выше было показано, что если черенковская стадия неустойчивости носит конвективный характер, то коэффициент усиления не зависит

от частоты и энергия волн будет распределена по спектру следующим образом:

$$W_{\omega} = \frac{\langle W_T \rangle}{\omega} \exp \tilde{\Gamma}. \quad (6.5)$$

Здесь  $\tilde{\Gamma} = \int_{u_{rp}}^{2\gamma} dr \langle W_T \rangle$  — средняя по частоте энергия тепловых шумов. При выводе (6.5) было учтено, что спектральная плотность энергии тепловых шумов обратно пропорциональна частоте колебаний. Для того чтобы получить долю энергии колебаний с частотой близкой к  $\omega_{pi}$ , можно воспользоваться уравнением переноса:

$$\frac{\partial W_{\omega}}{\partial t} + \frac{\omega}{k} \frac{\partial W_{\omega}}{\partial r} = 2\gamma_{\omega} W_{\omega}. \quad (6.6)$$

Проинтегрировав (6.6) по области локализации пучка, получим поток энергии, выносимый колебаниями с данной частотой:

$$\frac{d}{dt} \int W_{\omega} dV = \frac{\omega}{k} \frac{\langle W_T \rangle}{\omega} \exp \Gamma = \frac{\omega}{k_z} \frac{\langle W_T \rangle}{\omega_{pe}} \exp \Gamma. \quad (6.7)$$

Интегрированием (6.7) по спектру можно получить отношение потока энергии, передаваемого колебаниями ионам, к полному потоку энергии в колебания:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_{pi}}^{2\omega_{pi}} d\omega \int W_{\omega} dV \left( \frac{d}{dt} \int_{2\omega_{pi}}^{\omega_{pe}} d\omega \int W_{\omega} dV \right)^{-1} \sim \omega_{pi}/\omega_{pe}. \quad (6.8)$$

Можно, следовательно, сказать, что в режиме конвективной неустойчивости лишь очень небольшая часть энергии возбужденных колебаний должна идти на нагрев надтепловых ионов.

Рассмотрим теперь вопрос об изменении напряжения на обходе плазменного шнура, сопровождающем каждый всплеск неустойчивости. Для объяснения этих выбросов рассмотрим более подробно уравнение эквивалентной вторичной цепи, содержащей плазменный виток с током:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2} = UI - RI^2. \quad (6.9)$$

Здесь  $L$  — коэффициент самоиндукции плазменного витка;  $R$  — его активное сопротивление;  $U$  — напряжение, измеряемое на разьеме кожуха;  $I$  — полный ток в плазме. Из (6.9) следует, что к изменению напряжения при заданном токе могут приводить как индуктивные эффекты, так и эффекты изменения активного сопротивления. Рассмотрим сначала первый из этих процессов. Для этого пренебрежем вторым членом в правой части (6.4):

$$\Delta U \approx \frac{I}{c^2} \frac{\Delta L}{2\tau}, \quad (6.10)$$

где  $\Delta L$  — изменение индуктивности в процессе развития неустойчивости, а  $\tau$  — характерное время его изменения. Оказывается, что основной вклад в изменение индуктивности плазмы вносит изменение малого радиуса шнура, обусловливаемое резким увеличением поперечной энергии пучка. Радиальное расширение шнура приводит к уменьшению индуктивности шнура на

$$\Delta L = -4\pi R \Delta a / a. \quad (6.11)$$

Изменение малого радиуса шнура  $\Delta a$  можно связать с изменением поперечной энергии пучка  $\Delta E_{\perp}$  следующим образом. Из условия вмерзности продольного поля и баланса давлений находим

$$\pi a^2 \Delta E_{\perp} = 2\pi a \Delta a B_0^2 \quad (6.12)$$

или  $\Delta a/a \approx \Delta E_{\perp} / 2B_0^2$ .

Подставляя (6.12) в (6.11) и (6.10), получаем

$$\Delta U \simeq -\frac{I}{c^2} \frac{4\pi R}{4\tau} \frac{\Delta E_{\perp}}{B_0^2}. \quad (6.13)$$

Практически в (6.13) входит интеграл  $\int_0^{\tau} \Delta U dt$ . Истинное, т. е. наблюдаемое в эксперименте, значение  $\Delta U$  может быть гораздо меньше из-за экранирующего влияния лайнера. Для учета этого фактора в (6.13) вместо  $\tau$  следует подставить не длительность пучка, а постоянную времени интегрирования лайнера. Заметим, что расширение шнура по малому радиусу приводит к отрицательной величине выброса напряжения.

Оценим теперь изменение напряжения, связанное с изменением активного сопротивления шнура за счет потери ускоренными электронами продольного импульса при их развороте и последующем торможении. Естественно, что знак  $\Delta U$  при этом будет положительным:

$$\Delta U = -R \Delta I_b \quad (6.14)$$

или  $\Delta U/U = -\Delta I_b / (I - I_b)$ . Изменение  $\Delta I_b$  может быть оценено как  $\Delta I_b = en_b \Delta v_b \pi a_b^2 \leq I_b$ :

$$\Delta U/U \leq I_b / (I - I_b). \quad (6.15)$$

В экспериментах на ТМ-3, как правило,  $I_b \ll I - I_b$ , поэтому эффект активного изменения напряжения был невелик. В экспериментах же на Т-6 [3], где пучок переносил основную часть тока, величина, описываемая (6.14), могла превышать индуктивный эффект уменьшения напряжения, т. е. суммарное  $\Delta U$  должно было быть больше нуля. Следует, однако, подчеркнуть, что в любом случае активное сопротивление плазмы не может стать больше классического значения, поскольку рассмотренная неустойчивость затрагивает лишь надтепловые электроны.

И наконец, знание эволюции электронной функции распределения во время развития неустойчивости позволяет оценить изменение во времени синхротронного излучения плазмы. Мы рассмотрим этот про-

цесс на примере упрощенной модели, описанной в [35]. На начальной стадии развития неустойчивости, когда анизотропия пучка достаточно большая, можно считать, что разворот пучка приводит лишь к увеличению поперечной энергии резонансных электронов. В этом случае квазилинейное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{D}{v_{\perp}} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\perp}}, \quad (6.16)$$

$$\text{где } D = \frac{8\pi^2 e^2 \omega_{Be}^2}{m^2} \int d\mathbf{k} \frac{W_{\mathbf{k}}}{k^2} \delta(\omega_{Be} - k_z v_z) J_1^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Be}} \right); \quad W_{\mathbf{k}} = |E_{\mathbf{k}}|^2 / 8\pi.$$

Будем предполагать, что для частиц пучка на всей стадии разворота выполнено неравенство  $\frac{k_{\perp} v_b}{\omega_{Be}} \ll 1$ . Это позволяет упростить выражение для коэффициента диффузии:

$$D \approx \frac{2\pi^2 e^2 v_1^2}{m^2} \int d\mathbf{k} W_{\mathbf{k}}(t) \delta(\omega_{Be} - k_z v_z) \frac{k_{\perp}^2}{k^2}.$$

Для дальнейшего удобно ввести новую переменную  $\tau$ , связанную с  $t$  соотношением:

$$\tau = \frac{2\pi^2 e^2}{m^2} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} W_{\mathbf{k}}(t') \delta(\omega_{Be} - k_z v_z), \quad (6.17)$$

после чего уравнение (6.16) принимает вид уравнения диффузии:

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \frac{\partial f_e}{\partial v_{\perp}}.$$

Начальным условием для этого уравнения служит электронная функция распределения перед моментом возбуждения неустойчивости:

$$f_e = \frac{f_z(v_z = v_{кр})}{2\pi v_{Te}^2} \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_z^2} \right) \exp \left( -\frac{v_{\perp}^2}{v_{Te}^2} \right). \quad (6.18)$$

Здесь  $f_z(v_z = v_{кр})$  — значение одномерной функции распределения в области  $v_z = v_{кр}$ . В этом случае решение уравнения (6.16) имеет следующий вид:

$$f(v_z, v_{\perp}, \tau) = \frac{f_z(v_z = v_{кр})}{2\pi} \left( 1 + \frac{v_{кр}^2}{v_z^2} \right) \frac{1}{4\tau + v_{Te}^2} \exp \left( -\frac{v_{\perp}^2}{4\tau + v_{Te}^2} \right). \quad (6.19)$$

Для того чтобы выразить (6.19) через реальное время  $t$ , необходимо решить уравнение для уровня энергии возбужденных колебаний.



Будем для простоты считать, что неустойчивость носит конвективный характер. В этом случае уровень колебаний определяется как

$$W_k \approx \frac{T_e}{2} \exp(2\gamma_k L/u_{гр}), \quad (6.20)$$

где  $L$  — характерный размер области локализации пучка;  $u_{гр}$  — групповая скорость волны. Считая также, что неустойчивость возбуждает колебания с характерной величиной  $(kr_D)^{-2} \approx 3$  и  $\mu \approx 0,2$ , получаем из (6.17):

$$\begin{aligned} t &\approx \frac{\tau}{v_z^2} \frac{n_e r_D^3}{\pi^2 \omega_{pe}} \left( \frac{v_z}{v_{Te}} \right)^3 10 \exp \left( - \frac{2L\gamma_k k v_{Te}}{\mu (1-\mu^2) v_{Te}} \right) \sim \\ &\sim 10^3 \frac{\tau}{v_z^2} \frac{n_e r_D^3}{\omega_{pe}} \exp \left( -4 \cdot 10^{-3} \frac{L}{r_D} \right). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Простая оценка показывает, что для  $L/r_D \approx 10^3$   $t \approx 1-10$  мкс для  $\tau_0 \approx v_b^2$ . Именно за это время ( $\tau \sim \tau_0$ ) поперечная энергия увеличивается до уровня продольной энергии пучка; за это же время происходит насыщение неустойчивости.

Зная временное поведение функции распределения пучка ускоренных электронов, можно оценить зависимость от времени мощности синхротронного излучения из плазмы. Для этого необходимо полученное значение для  $f(\tau)$  подставить в формулу Скотта—Трубникова [36]. Полная мощность, излучаемая в  $m$ -ю гармонику необыкновенной волны, распространяющейся строго поперек магнитного поля, оказывается следующей:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\Omega} &\approx \delta \frac{e^2 m^2 \omega_{Be}^2}{2\pi c} \frac{n_b}{n_e} \left( \frac{v_{Te}}{c} \right)^4 m^2 \frac{(4\tau + v_{Te}^2)^2}{v_{Te}^4} \times \\ &\times \exp \left( - \frac{m^2 v_{Te}^2}{c^2} \left( \frac{4\tau}{v_{Te}^2} + 1 \right) \right) \left\{ \left( 1 + \frac{2c^2/v_{Te}^2}{m(4\tau/v_{Te}^2 + 1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2c^4/v_{Te}^4}{m^2(4\tau/v_{Te}^2 + 1)^2} \right) I_m - I_{m-1} \right\}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где  $I_m = I_m \left( \frac{m^2(4\tau/v_{Te}^2 + 1)}{c^2/v_{Te}^2} \right)$  и  $\delta$  — доля резонансных ускоренных электронов. Следует отметить, что формула (6.22) справедлива для всех гармоник с  $m > 1$ . Из (6.22) следует, что характерное увеличение

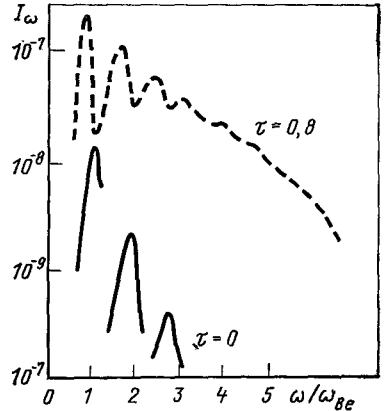


Рис. 7. Синхротронное излучение пучка при веерной неустойчивости

интенсивности синхротронного излучения происходит за времена порядка одной микросекунды, что и наблюдается на эксперименте. Зависимость характерного спектра синхротронного излучения от времени, даваемого (6.22) для типичных условий эксперимента, показана на рис. 7.

## § 7. Аномальная диффузия ускоренных электронов

Выше было показано (см. § 2.3), что электроны со скоростью  $v_z > v_{кр}$  свободно ускоряются электрическим полем и при отсутствии аномальных эффектов успевают набрать в нем релятивистскую энергию, прежде чем покинут систему за счет сильного отклонения дрейфовой поверхности от магнитной. Предельная энергия электрона однозначно связана с размерами установки; ее измерение с помощью датчиков рентгеновского излучения может служить методом определения классичности поведения ускоренных электронов в токамаке.

В проведенных к настоящему времени экспериментах было обнаружено [37—39], что в разрядах с умеренной плотностью (т. е. в разрядах с максимальным  $E/E_D$ ) поведение ускоренных электронов не укладывается в рамки классических представлений. Во-первых, оказалось, что характерная энергия быстрых электронов меньше величины, предсказываемой классической теорией, так что их энергетическое время жизни не больше, чем на порядок, превышает энергетическое время жизни основной компоненты электронов. Более того, было показано [40], что при увеличении параметра  $E/E_D$  выше некоторого критического значения начинает падать интенсивность коротковолнового рентгеновского излучения из разряда.

Все эти данные позволяют сделать вывод о том, что в разрядах с большим отношением  $E/E_D$  для убегающих электронов существует аномальный механизм диффузии, не позволяющий таким электронам накапливаться в системе и ускоряться до релятивистских энергий. Одним из возможных механизмов появления такой аномальности может служить рассмотренная выше неустойчивость ускоренных электронов, возбуждаемая за счет аномального эффекта Доплера. Известно [41], что любая кинетическая неустойчивость в неоднородной плазме должна приводить к аномальной диффузии резонансных частиц поперек магнитного поля. При этом колебания служат как бы третьим телом, с которым электроны обмениваются поперечным импульсом, что приводит к их диффузии по радиусу. Для совместного описания процесса развития неустойчивости и диффузии резонансных электронов можно воспользоваться системой квазилинейных уравнений, в неоднородной плазме имеющих следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} = \int dk \left( -\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_{\theta}}{k_z \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \times \\ \times 4 \left( \frac{\pi e}{m} \right)^2 \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{|E|_k^2}{4\pi} \delta(\omega_{Be} - k_z v_z) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left( -\frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} + \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{k_\theta}{k_z \omega_{Be}} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \\ & + \int dk \left( \frac{\partial}{\partial v_z} + \frac{k_\theta}{k_z \omega_{Be}} \frac{\partial}{\partial r} \right) 16 \left( \frac{\pi e}{m} \right)^2 \frac{k_z^2}{k^2} \frac{|E|_k^2}{4\pi} \delta(\omega - k_z v_z) \times \\ & \times \left( \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{k_\theta}{k_z \omega_{Be}} \frac{\partial f}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{|E|_k^2}{4\pi} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{|E|_k^2}{4\pi} = \\ & = \left\{ \frac{\pi}{4} \omega_{\mathbf{k}} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int dv \delta(\omega_{Be} - k_z v_z) \frac{k_\perp^2 v_\perp^2}{\omega_{Be}^2} \times \right. \\ & \times \left( -\frac{k_z v_z}{v_\perp} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} + k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{k_\theta}{\omega_{Be}} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \\ & \left. + \pi \omega \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int dv \delta(\omega - k_z v_z) \left( k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{k_\theta}{\omega_{Be}} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - v_{ei} \right\} \frac{|E|_k^2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Уравнение (7.1) написано для бесстолкновительной плазмы, поскольку в дальнейшем нас будут интересовать лишь частицы со скоростями  $v_z > v_{кр}$ ,  $k_r$  — проекция волнового вектора на малый радиус тора,  $k_\theta$  — проекция волнового вектора на ось  $\theta$  (вдоль малого обхода тора).

Первый член в правой части (7.1) [и соответствующий ему первый член в правой части (7.2)] описывает взаимодействие резонансных частиц с колебаниями на аномальном эффекте Доплера как в скоростном, так и координатном пространстве. Вторые члены в правых частях (7.1) и (7.2) описывают взаимодействие электронов с колебаниями за счет эффекта Черенкова.

Поскольку в этом разделе нас будет интересовать сравнительно медленная диффузия резонансных электронов в координатном пространстве, а не динамика развития неустойчивости (скорость первого процесса примерно в  $(\rho_{Le}/a)^2$  раз меньше второго), то мы можем искать решение системы (7.1), (7.2), усредненное по времени, большему, чем период между двумя последовательными всплесками неустойчивости (если последняя носит релаксационный характер). Это позволяет, во-первых, исключить из рассмотрения область черенковского резонанса, поскольку при  $W/W_T \gg 1$  отсутствует затухание Ландау в области  $v_z \approx \omega_{pe}/k$ , а во-вторых, в этом случае мы можем искать квазистационарное решение системы (7.1), (7.2) в области  $v_z > v_{кр}$ .

Кроме того, ниже мы ограничимся случаем, когда неустойчивость носит абсолютный характер (условия применимости такого рассмотрения описаны выше). Это позволяет исключить из уравнения (6.1) перекрестные производные типа  $d^2 f / dv dr$  ввиду симметрии спектра возбуждаемых колебаний по  $k_\theta$ . Будем также считать, что для всех

возбужденных колебаний выполнено условие  $\ll \frac{k - \langle k \rangle}{k} \gg \ll 1$  ( $\ll \dots \gg$  — усреднение по спектру). Выполнение этого неравенства соответствует узости зоны черенковского взаимодействия по сравнению с шириной зоны доплеровского резонанса и, как было показано выше, выполняется практически всегда. В этом случае можно считать, что  $k_{\perp} \simeq k = k_0 \simeq \omega_{pe}/v_{\text{кр}}$ , т. е.

$$\frac{|E|_k^2}{4\pi} = W_0 (\cos \theta) \frac{\delta(k - k_0)}{2\pi k_0^2} \delta(\omega - \omega_{pe} \cos \theta), \quad (7.3)$$

где  $\cos \theta = k_z/k$ , т. е.  $W_0 = W_0(v_z)$ .

С учетом всего сказанного выше система (7.1), (7.2) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} &= \left( -\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \pi \frac{e^2}{m^2} \times \\ &\times \frac{v_{\perp}^2}{k_0 v_z^3} W_0 \left( -\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) + \frac{c^2 k_0}{B^3 \omega_{Be}^2} \times \\ &\times W_0 \frac{v_{\perp}^2}{v_z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\frac{dW_0}{dt} = W_0 \left[ \pi \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be} n_e} \frac{1}{k_0 v_z} \left( \frac{\partial}{\partial v_z} \langle v_{\perp}^2 f \rangle - 2v_z \langle f \rangle \right) - \nu_{ei} \right], \quad (7.5)$$

где  $\langle f \rangle = \int f dv_{\perp}$ .

Ниже мы рассмотрим предельный случай сильной неустойчивости, когда в плазме присутствует достаточно много ускоренных электронов. При этом из (7.5) следует, что на стационарной стадии развития неустойчивости в диапазоне скоростей  $v_{\text{кр}} \leq v_z \leq v_b$  ( $mv_b^2$  — характерная энергия частиц пучка) функция распределения электронов в пространстве скоростей почти изотропна.

Наличие параметра малости

$$\frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel} + T_{\perp}} = \frac{\int (v_z^2 - v_{\perp}^2) f_e dv}{\int (v_z^2 + v_{\perp}^2) f_e dv} \ll 1 \quad (7.6)$$

позволяет качественно проследить за диффузией ускоренных электронов, используя моменты от электронной функции распределения, аналогичные введенным в § 5. Для этого умножим последовательно уравнение (7.4) на  $v_z^2 + v_{\perp}^2$  и  $v_z^2 - v_{\perp}^2$  и проинтегрируем его по области локализации неустойчивости. В результате получим систему уравнений, аналогичную (5.4), (5.5):

$$\frac{d}{dt} (T_{\parallel} + T_{\perp}) = Q - \nu_T \frac{k_0 v_b^4}{\omega_{Be}^4 a^2} \frac{T_{\parallel} + T_{\perp}}{T_{\parallel}} \frac{\overline{W}_0}{n_e}; \quad (7.7)$$

$$\frac{d}{dt} (T_{\parallel} - T_{\perp}) = Q - v_{\tau} \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \frac{\bar{W}_0}{n_e} \left( 1 + \frac{k_0^2 v_b^4}{\omega_{Be}^4 a^2} \right), \quad (7.8)$$

где  $T_{\parallel} \approx m v_b^2$ .

При получении (7.7), (7.8) члены с производными по  $r$  были заменены  $\partial/\partial r \rightarrow 1/a$ ;  $\bar{W}_0 = \int \frac{W_0(v_z) dv_z}{v_b}$ . Для получения замкнутой системы уравнений проинтегрируем (7.5) по  $v_z$  (в пределах  $v_{KP} \leq v_z \leq v_b$ , там, где  $W_0 \gg W_{\tau}$ ):

$$\frac{d\bar{W}_0}{dt} \approx \bar{W}_0 \left[ \gamma \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} - v_{ei} \right]. \quad (7.9)$$

В системе (7.7)—(7.9) неизвестными являются величины  $W_0$ ,  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$ . Определением величины  $n_b$  служит равенство

$$n_b = f_z (v_z = v_{KP}) v_b.$$

Стационарное решение системы (7.7)—(7.9) позволяет качественно проследить за зависимостью энергии пучка, его анизотропии и плотности энергии колебаний от основных параметров плазмы:

$$\left( \frac{v_b}{v_{Te}} \right)^2 \approx \frac{1}{\sqrt{n_e r_D^3}} \left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \right)^{3/2} \frac{a}{\rho_{Le}} \left( \frac{E_D}{E} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}; \quad (7.10)$$

$$\bar{W}_0 \approx \frac{eE}{m} \frac{B_0^2}{c^2} \frac{\omega_{Be}^2 a^2}{k_0 v_b^2} \sim \sqrt{\Gamma}; \quad (7.11)$$

$$\frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \approx \frac{v_{ei}}{\omega_{pe}} \frac{\omega_{Be}}{\omega_{pe}} \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\frac{E}{E_D}}. \quad (7.12)$$

Величина  $\Gamma$  характеризует количество электронов, уходящих в «проект», и определяется формулой (2.18).

Из (7.10)—(7.12) следует, что при увеличении отношения  $E/E_D$  (т. е. при увеличении количества частиц, уходящих в режим непрерывного ускорения) их характерная энергия уменьшается. Это является простым следствием того факта, что эффективность процесса аномальной диффузии, приводящего к уходу быстрых электронов из системы, пропорциональна плотности энергии колебаний  $\bar{W}_0$ . Последняя величина, естественно, пропорциональна количеству быстрых электронов, т. е. величине  $\Gamma$ . Характерная энергия частиц пучка обратно пропорциональна количеству быстрых электронов.

Полученные соотношения позволяют объяснить обе обнаруженные на эксперименте и описанные выше аномалии в поведении быстрых электронов в разрядах с умеренной плотностью. Действительно, при больших  $E/E_D$  в системе развивается неустойчивость, приводящая к усиленному выносу ускоренных электронов из системы, причем этот вынос происходит тем быстрее, чем больше  $E/E_D$ .

Остановимся теперь на вопросе влияния пучка ускоренных электронов на энергобаланс плазмы в токамаках. Известно, что режимы с умеренной плотностью являются наиболее аномальными по электронной компоненте. Дело в том, что эффективность известных классических механизмов потерь электронной энергии (передача тепла ионам при столкновениях, излучение на примесях и неоклассическая теплопроводность) в отличие от джоулева энерговыделения падает при уменьшении плотности плазмы (или, что то же самое, при увеличении параметра  $E/E_D$ ). Тем не менее эксперименты показывают, что при уменьшении плотности температура основной электронной компоненты не увеличивается. Именно поэтому в большинстве эмпирически подобранных формул для электронной теплопроводности содержится фактор аномальности, обратно пропорциональный плотности плазмы. Прежде всего напомним, как экспериментально определяется аномальность электронной теплопроводности. Пишется уравнение электронного энергобаланса для всего плазменного шнура:

$$\frac{d}{dt_a} \overline{n_e T_e} = \frac{IE}{\pi a^2} - \frac{\overline{n_e T_e}}{\tau_E}. \quad (7.13)$$

Здесь  $\overline{n_e T_e} = \frac{2}{a^2} \int_0^a n_e T_e r dr$ ,  $\tau_E$  — энергетическое время жизни электронов,  $I$  — полный ток. В стационарной стадии разряда

$$\tau_E = \frac{\pi a^2 \overline{n_e T_e}}{IE}, \quad (7.14)$$

Величина аномальности электронной теплопроводности определяется как

$$A = \frac{a^2}{\overline{\chi_e^{\text{neo}}} \tau_E} = \frac{IE}{\pi n_e T_e \overline{\chi_e^{\text{neo}}}}, \quad (7.15)$$

где  $\overline{\chi_e^{\text{neo}}}$  — неоклассический коэффициент электронной теплопроводности (см., например, [21]).

Наличие в плазме пучка ускоренных электронов может влиять на энергобаланс основной электронной компоненты по двум каналам. Во-первых, такие электроны могут переносить заметную часть тока, не давая вклада в джоулево энерговыделение. Поэтому в формуле (7.13) и далее величину  $I$  нужно заменить на  $I \rightarrow I - I_b$ , где  $I_b$  — ток, переносимый пучком. Используя соотношения (7.10)–(7.12), можно показать, что

$$\frac{I - I_b}{I_b} \sim \sqrt{\frac{\omega_{pe}}{\nu_{ei}}} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_{B\theta}} \right)^{3/2} \frac{\rho_{Le}}{a} \left( \frac{E}{E_D} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}, \quad (7.16)$$

Из (7.16) следует, что при достаточно большом отношении  $E/E_D$  ( $E/E_D \sim 0,1$ ) ускоренные электроны могут переносить заметную долю тока, уменьшая тем самым (при заданном значении запаса устойчивости  $q$ ) мощность джоулевого энерговыделения. Выше уже говорилось, что в экспериментах на Т-6 [3] были зарегистрированы режимы, в которых пучок переносил практически весь ток, так что основная плазма оставалась холодной.

И наконец, наличие пучка может приводить к появлению специфического механизма потери энергии основной электронной компоненты. Действительно, представим себе, что энергия ускоренных электронов необратимо уходит из разряда. К такому эффекту может приводить уход из плазмы замагниченных ленгмюровских колебаний, возбуждаемых пучком [42], или рассмотренная выше аномальная диффузия ускоренных электронов. В этом случае тепловая масса электронов также будет терять энергию за счет существования непрерывного потока частиц и энергии из области удержания в область непрерывного ускорения. Количественно эффект охлаждения основной компоненты электронов можно оценить следующим образом. Напишем одномерное уравнение для электронов, считая, что, начиная с некоторой скорости  $v_0 \gg v_{Te}$ , в системе существует сток с интенсивностью  $\nu_1$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \nu_{ei}(T_e) \frac{v_{Te}^3}{v^3} \times \\ \times \left( v f + \frac{T_e}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \nu_1 f \theta(v - v_0). \quad (7.17)$$

Умножим (7.17) на  $mv^2/2$  и проинтегрируем его по пространству скоростей. Поскольку интеграл электрон-электронных столкновений не меняет энергию электронов, то в результате получим

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} n_e T_e = eE \int_{-\infty}^{\infty} v f dv - \nu_1 m \int_{v_0^2}^{\infty} \frac{v^2}{2} f dv. \quad (7.18)$$

Для нахождения функции распределения электронов в области  $v > v_0$  можно воспользоваться тем фактом, что в области  $v > v_0 \gg v_{кр}$  главный вклад в интеграл столкновений вносит динамическая сила трения (можно показать, что пренебрежение диффузией в пространстве скоростей в области  $v \gg v_0$  справедливо при выполнении неравенства  $\frac{v_0 e E}{m v_{ei} v_{Te}^2} > 1$ ). В этом случае стационарное решение (6.17) в области  $v > v_0$  имеет вид

$$f = f(v_0) \exp \left\{ -\frac{v - v_0}{u_1} + \frac{v_{Te}^2}{u} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) \right\}, \quad (7.19)$$

где  $u_1 = eE/mv_1$ ;  $u = eE/mv_{ei}$ .

Подставляя (7.19) в (7.18), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{d}{dt} n_e T_e = eE \int_{-\infty}^{v_0} v f dv - \frac{eE}{m} \frac{mv_0^2}{2} \frac{f(v_0)}{1 + 2 \frac{v_{Te}^3 v_{ei}}{v_0^3 v_1}} + \\ + eE \int_{v_0}^{\infty} 2 \frac{v_{Te}^3}{v^3} \frac{v_{ei}}{v_1} \left( 1 + 2 \frac{v_{Te}^3}{v^3} \frac{v_{ei}}{v_1} \right)^{-1} v f dv. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Рассмотрим предельный случай интенсивного стока энергии, при этом из (7.20) следует

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} n_e T_e = eE \int_{-\infty}^{v_0} v f dv - \frac{eE}{m} \frac{mv_0^2}{2} f(v_0). \quad (7.21)$$

Первый член в правой части (7.21) описывает джоулев нагрев плазмы, второй член — охлаждение электронов за счет существования постоянного потока энергии в область убегания (в область  $v > v_0$ ). Выражение (7.21) описывает максимальный эффект охлаждения, соответствующий тому, что все электроны со скоростями  $v > v_0$  покидают систему, не успев за счет столкновений передать часть энергии основной компоненте. Учет конечной частоты столкновений в области убегания приводит к естественному уменьшению эффекта охлаждения — второй член в правой части (7.20) описывает охлаждение электронов, уменьшенное за счет столкновений, а последний член в правой части (7.20) описывает вклад хвоста электронов в джоулев нагрев. Если в качестве оценки в (7.21) взять  $f(v_0) = f_z(\infty) = \frac{n_e}{\sqrt{\pi} v_{Te}} \Gamma$ , то оказывается

[43], что описываемый эффект охлаждения в разрядах с умеренной плотностью намного превышает все классические механизмы потери электронной энергии и может играть определяющую роль в энергобалансе электронов в таких режимах работы токамаков. И наконец, отметим еще один конвективный механизм ухода ускоренных электронов из разряда за счет запертия их в локальных минимумах тороидального поля и последующего вертикального дрейфа [44]. Выше было показано (см. § 3), что локально-запертые электроны уходят из системы, если их энергия превышает критическую  $\varepsilon_{кр} \simeq \varepsilon_{\perp} \geq m \left( v_{ei} v_{Te}^3 a R \omega_{Be} \frac{B}{\delta B} \right)^{2/5}$ . Ясно, что достаточно много быстрых электронов, запертых в локальных минимумах магнитного поля, может образоваться лишь при развитии неустойчивости на аномальном эффекте Доплера. В этом случае возможен конвективный вынос энергии из шнура за счет тороидального дрейфа.



## § 8. Нелинейные процессы и нагрев ионов

Выше было показано, что развитие неустойчивости приводит к возбуждению в плазме замагниченных ленгмюровских колебаний, причем плотность их энергии может быть весьма велика  $W_l \leq m n_b v_b^2 \omega_{pe} / \omega_{Be}$ . Как правило, в разрядах с неустойчивостью энергия пучка сравнима с энергией основной электронной компоненты  $m n_b v_b^2 \sim n_e T_e$ , откуда следует, что  $W_l / nT \lesssim 1$ . Ясно, что в этих случаях нелинейные процессы могут оказывать существенное влияние на динамику развития неустойчивости.

В этом параграфе мы подробно остановимся лишь на одном (по-видимому, наиболее ярком) проявлении нелинейных процессов — наблюдаемом на эксперименте аномальном нагреве ионов. Напомним, что в эксперименте на ТМ-3 было показано, что в каждом всплеске неустойчивости ионная температура увеличивалась на  $\Delta T_i \lesssim 0,3 \Delta T_{e\perp}$  ( $T_{e\perp}$  — диамагнитная температура электронов).

Как известно, наиболее низкопороговыми (по  $W/nT$ ) нелинейными процессами являются трехплазмонные взаимодействия типа распадов волн или индуцированного рассеяния волн на резонансных частицах.

В рассматриваемом диапазоне частот  $\omega_{pi} < \omega \leq \omega_{pe}$  наиболее эффективны два процесса [41, 45, 46]: распад ленгмюровской волны на две ленгмюровские же волны с меньшей частотой и распад ленгмюровской волны на ленгмюровскую и ионно-звуковую волны.

Законы сохранения этих процессов можно описать следующим образом:

$$\omega_l = \omega'_i + \omega''_i; \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{k}'_i + \mathbf{k}''_i; \quad (8.1)$$

$$\omega_l = \omega'_i + \omega'_s; \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{k}'_i + \mathbf{k}'_s. \quad (8.2)$$

Если  $\omega \leq \omega_{pe}$ , то  $\omega'_s \ll \omega_l \omega'_i$ . В изотермической плазме ионно-звуковые колебания становятся сильно затухающими и эффективность второго процесса [описываемого соотношениями (8.2)] сравнивается с эффективностью рассеяния ленгмюровских волн на ионах. При этом частота  $\omega'_s$  перестает быть собственной частотой, а  $\omega'_s \approx |\mathbf{k}_l - \mathbf{k}'_i| v_i$ ; где  $v_i$  — скорость резонансных ионов. Более того, в неоднородной плазме второй процесс распада быстро переходит в процесс индуцированного рассеяния, поскольку необходимость выполнения законов сохранения (8.2) приводит к тому, что частота звуковых колебаний  $\omega'_s = \omega_l - \omega'_i$  перестает быть собственной частотой.

Неоднородность плазмы приводит также к резкому уменьшению эффективности процесса (8.1), поскольку резонансные условия выполняются лишь в небольшой части объема плазмы (см., например, [45]). По этой причине мы подробно рассмотрим лишь один нелинейный процесс — индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на ионах. Кроме того, ниже будет показано, что в реальных условиях эксперимента учет только первого механизма позволяет объяснить эффективный нагрев ионов.

Итак, рассмотрим нелинейный механизм рассеяния замагниченных ленгмюровских колебаний на ионах. Он описывает последовательное уменьшение частоты ленгмюровских квантов на  $\omega_s'' \sim |k_l - k_l'| v_{Ti}$ , причем энергия  $\hbar\omega_s''$  идет, естественно, на нагрев ионов. В общем виде уравнение, описывающее изменение во времени спектральной плотности числа квантов ленгмюровских волн  $n_k$ , записывается следующим образом:

$$-\frac{\partial n_k}{\partial t} + \gamma_k n_k = \int T_{kk'} n_{k'} n_k dk', \quad (8.3)$$

где  $\gamma_k = \nu_{ei} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_k}{(kr_D)^3} \exp\left(-\frac{1}{(kr_D)^2}\right)$  — линейное затухание ленгмюровских волн на электронах за счет столкновений и затухания Ландау (затуханием Ландау на ионах мы пренебрегаем, считая, что  $\omega_l'$  далека от  $\omega_{pi}$ );  $T_{kk'}$  — матричный элемент нелинейного взаимодействия. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести безразмерную переменную  $\mu = \omega_l/\omega_{pe} = \cos \theta = k_{z1}/k_l$ .

Каждый акт индуцированного рассеяния приводит к изменению  $\mu$  (т. е. частоты ленгмюровской волны) на малую величину порядка  $\Delta\mu \sim \frac{|k-k'| v_{Ti}}{\omega} \ll \mu$ . Это означает, что нелинейно взаимодействуют лишь ленгмюровские волны с близкими частотами, и приводит к тому, что уравнение (8.3) может быть записано в диффузионном приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_l(\mu, k) + \gamma_n n_l(\mu, k) = \int 2\pi k'^2 dk' T(k, k', \mu) \times \\ \times n_l(\mu, k) (\Delta\mu)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} n_l(\mu, k'). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Уравнение (8.4) справедливо, естественно, лишь в области, достаточной удаленной от источника ленгмюровских волн, возбуждаемых пучком. Ниже для упрощения будем считать, что пучок возбуждает монохроматический по  $\mu$  и  $k$  спектр ленгмюровских колебаний:

$$N_{kl} = N_l \delta(\mu - \mu_0) \frac{\delta(k - k_0)}{2\pi k^2}; \quad (8.5)$$

по порядку величины такое предположение не меняет результатов, а на большую точность приводимые в этом параграфе расчеты и не могут претендовать. С использованием описанных выше предположений уравнение для  $N_l$  может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial N_l}{\partial t} = \gamma_l N_l - \int 2\pi k'^2 dk' \Delta\mu n(\mu_0, k') N_l T(k_0, k', \mu_0) - \nu_{ei} N_l. \quad (8.6)$$

Использование (8.5) позволяет также в явном виде включить в (8.4) источник волн при  $\mu = \mu_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_l(k, \mu) + \gamma_n n_l(k, \mu) = \int 2\pi k'^2 dk' T(k, k', \mu) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\Delta\mu)^2 n_l(k, \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} n_l(k', \mu) + T(k, k_0, \mu_0) \times \\ & \times \Delta\mu n_l(k, \mu) N_l \delta(\mu - \mu_0 + \Delta\mu). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Уравнения (8.6), (8.7) представляют собой замкнутую систему, описывающую поведение ленгмюровских волн. Здесь необходимо, правда, сделать одно замечание. В уравнении (8.6) не включены в рассмотрение квазилинейные эффекты, приводящие к насыщению неустойчивости. Качественно их можно учесть, полагая, что  $\gamma_l = \gamma_l^0 \theta(\tau - t)$ , где  $\gamma_l^0$  — линейный инкремент, определяемый соотношением (4.7); величина  $\tau$  — характерное время всплеска определяется из условия:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \gamma_l^0 N_l \omega_0 dt = W_l^{\text{макс}} \simeq m n_b v_b^2 \frac{\omega_0}{\omega_{pe}} \sim n_e T_e, \\ \tau = n_e T_e / \gamma_l^0 N_l \omega_0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Величина  $N_l$  должна находиться из самосогласованного решения системы (8.6), (8.7). Прежде чем переходить к ее решению, отметим следующее. Ниже нам не понадобится конкретный вид матричного элемента  $T(k, k', \mu)$ ; нужна будет лишь его функциональная зависимость от параметров  $k, k', \mu$ . Известно [47], что в плазме с  $\omega_{pe} > \omega_{Be}$  матричный элемент  $T_{kk'}$  имеет порядок величины

$$T_{kk'} \sim \omega_k \omega_{k'} / n_e T_e. \quad (8.9)$$

Вообще говоря, в замагниченной плазме вид матричного элемента меняется из-за учета замагниченности движения элементов поперек магнитного поля [48]:  $T_{kk'} \sim \frac{\omega_k \omega_{k'}}{n_e T_e} \left( 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{k'}^2} \right)$ . Однако для дальнейшего это несущественно. Подставляя (8.9) в (8.6) и (8.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_l}{\partial t} + \gamma_{\tilde{k}} n_l = \int 2\pi k'^2 dk' \frac{(k'^2 + k^2) v_{Ti}^2}{n_e T_e} n_l \frac{\partial}{\partial \mu} n_l' + \\ + \frac{\omega_0}{n_e T_e} k v_{Ti} n_l(\mu_0) N_l \delta(\mu - \mu_0 + \Delta\mu); \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial N_l}{\partial t} = \gamma_l n_l - N_l \int 2\pi k'^2 dk' n_l' \frac{\omega_0 k' v_{Ti}}{n_e T_e} - \nu_{ei} N_l. \quad (8.11)$$

Система (8.10), (8.11) определяет стационарные состояния с большой степенью произвола. Этот произвол снимается условием устойчивости стационарного состояния относительно возбуждения колебаний в тех областях  $\mathbf{k}$ -пространства, где  $n_l = 0$  [47]:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k &= \gamma_{\text{нл}} \text{ при } n_l \neq 0; \\ \gamma_k &> \gamma_{\text{нл}} \text{ при } n_l = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

$$\text{где } \gamma_{\text{нл}} = \int 2\pi k'^2 dk' \frac{(k'^2 + k^2) v_{Ti}^2}{n_e T_e} \frac{\partial}{\partial \mu} n_l'.$$

Соотношения (8.12) имеют простой геометрический смысл. Они означают, что при фиксированном  $\mu$  кривая  $\gamma_k(k)$  расположена выше кривой  $\gamma_{нл}(k)$  и касается ее в тех точках, где возбуждены колебания. Поскольку кривая  $\gamma_{нл}(k)$  является параболой, то она может касаться кривой  $\gamma_k(k)$  в одной точке  $k = k_m(\mu)$ , определяемой условиями:

$$\gamma_{нл}(k_m) = \gamma_k(k_m) \text{ и } \frac{d}{dk} \gamma_{нл}(k_m) = \frac{d}{dk} \gamma_k(k_m). \quad (8.13)$$

Используя явные выражения для  $\gamma_k(k)$  и  $\gamma_{нл}(k)$ , можно получить следующее условие для нахождения  $k_m(\mu)$ :

$$d\gamma_k/dk_m = \gamma_k(k_m)/k_m. \quad (8.14)$$

Отсюда следует, что  $k_m$  не зависит от вида спектра и определяется только линейным затуханием. Более того, из (8.14) следует, что при  $k = k_m$  вклад затухания Ландау мал, т. е. затухание колебаний определяется в основном электрон-ионными столкновениями:

$$\gamma_k(k_m) \approx \nu_{ei} (1 + k_m^2 r_D^2). \quad (8.15)$$

Сама величина  $k_m$  логарифмически зависит от параметров плазмы и оказывается порядка  $k_m \sim \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{7}\right) r_D^{-1}$ .

Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод о том, что спектр колебаний по крайней мере в области, не слишком близкой к источнику, имеет вид струи, протянувшейся в область малых  $\mu$ :

$$n_l(\mu, k) = n(\mu) \delta(k - k_m)/2\pi k^2. \quad (8.16)$$

Используя (8.16), перепишем окончательно систему (8.10), (8.11) в следующем виде:

$$\partial n / \partial t + \nu_{ei} n = \gamma_1 n \partial n / \partial \mu + \beta n N_l \delta(\mu - \mu_0); \quad (8.17)$$

$$\partial N_l / \partial t = -\nu_{ei} N_l - \beta n(\mu_0) N_l + \gamma_l N_l, \quad (8.18)$$

где  $\gamma_1 = k_m^2 \nu_{Ti}^2 / n_e T_e$ ,  $\beta = \gamma_1 \omega_0 / k_m \nu_{Ti} \gg \gamma_1$ .

Стационарное решение уравнения (8.18) определяет  $n(\mu_0)$ , являющуюся граничным условием для уравнения (8.17):

$$n(\mu_0) = (\gamma_l - \nu_{ei}) / \beta. \quad (8.19)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (8.17) по узкому слою от  $\mu_1 = \mu_0 - \Delta\mu$  до  $\mu_2 = \mu_0 + \Delta\mu$ . С учетом того что  $n(\mu + \Delta\mu) = 0$ , находим

$$N_l = \frac{\gamma_l}{\beta} n(\mu_0) = \frac{\gamma_l (\gamma_l - \nu_{ei})}{\beta^2}. \quad (8.20)$$

Предположим теперь, что столкновения малы, и рассмотрим решение уравнения (8.17) в области  $\mu \leq \mu_0$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma_1 n \frac{\partial n}{\partial \mu}; \quad n(\mu = \mu_0) = \frac{\gamma_l}{\beta} = n_0. \quad (8.21)$$

Уравнение (8.21) полностью аналогично нелинейному уравнению движения несжимаемой жидкости и описывает процесс опрокидывания волны. Характерное время укручения фронта волны  $\tau_1 = \Delta\mu / [\gamma_1 n(\mu_0)]$  много меньше времени прохождения волной расстояния  $\mu$  (что соответствует изменению  $\omega$  от  $\omega_0$  до  $\omega_{pi}$ ). Поэтому мы можем сразу искать решение уравнения (8.21) в виде

$$n(\mu) = n_0 \theta(\mu - \mu_0(t)) \theta(\mu_0 - \mu). \quad (8.22)$$

Для нахождения зависимости от времени координаты фронта  $\mu_\Phi(t)$  проинтегрируем (8.17) по  $\mu$  от  $\mu_1 = 0$  до  $\mu = \mu_0 + \delta$ :

$$n_0 d\mu_\Phi/dt = -\beta N_1 n_0/2 \quad (8.23)$$

или

$$\mu_\Phi = \mu_0 - \gamma_1 \frac{\gamma_l}{2\beta} t = \mu_0 - \frac{\gamma_l t}{2} \frac{k_m v_{Ti}}{\omega_0}. \quad (8.24)$$

Предположим теперь, что характерное время неустойчивости меньше времени прохождения волной расстояния  $\mu_0$ . Решение уравнения (8.21) для спектральной плотности квантов  $n(\mu)$  в этом случае имеет вид

$$n(\mu) = n_0 \theta(\mu - \mu_\Phi(t)) \theta(\mu_0 - \mu_\Phi(t - \tau) - \mu), \quad (8.25)$$

причем скорость перемещения фронта волны в область меньших  $\mu$  останется прежней.

В обратном предельном случае, когда время квазилинейной релаксации неустойчивости  $\tau > \frac{1}{\gamma_l} \frac{\omega_0}{k_m v_{Ti}}$ , можно построить стационарное решение уравнения (8.17):

$$n(\mu) = n_0 - \frac{v_{ei}}{\gamma_l} (\mu_0 - \mu). \quad (8.26)$$

И наконец, из уравнения (8.18) можно оценить долю энергии, передаваемой каждым квантом ленгмюровских волн электронам за счет электрон-ионных столкновений. Считая, что столкновения уносят малую долю энергии (это предположение подтверждается результатом), можно записать:

$$\left( \frac{d}{dt} W \right)_{v_{ei}} = -v_{ei} W(t), \quad (8.27)$$

где  $W(t) = \omega_0 \mu_\Phi(t) n_0$ . Из (8.27) следует, что

$$\frac{(\Delta W)_{v_{ei}}}{W(\mu_0)} = \frac{v_{ei}}{2\gamma_l \frac{k_m v_{Ti}}{\omega_0}}. \quad (8.28)$$

Формула (8.28) дает выражение для доли энергии волн, теряемой за счет  $v_{ei}$  и идущей на нагрев нерезонансных электронов. В реальных условиях эксперимента величина  $(\Delta W)_{v_{ei}}/W(\mu_0)$  очень мала (не

более одного процента). Вся остальная энергия волн идет на нагрев ионов. Поскольку  $W_{\Gamma}^{\text{макс}} \sim mn_b v_b^2 \omega_0 / \omega_{Be}$ , то можно сказать, что на нагрев ионов идет доля  $\sim \omega_{pe} / \omega_{Be}$  энергии пучка, что и наблюдается на эксперименте.

В заключение отметим, что учет других нелинейных механизмов, например типа (8.1), может лишь увеличить эффективность нагрева ионов, поскольку он полностью аналогичен рассмотренному выше процессу индуцированного рассеяния на ионах с той лишь разницей, что при одинаковой интенсивности процесс (8.1) быстрее приводит к перекачке энергии в область частот  $\omega \sim \omega_{pi}$  (в нем больше шаг перекачки), а следовательно, приводит к меньшей потере энергии волны «по дороге» к ионам.

## § 9. Заключение

Выше было рассмотрено поведение ускоренных электронов в современных токамаках. Естественно задать вопрос: будут ли такие быстрые электроны приводить к заметным макроскопическим эффектам в токамаках-реакторах будущего? Однозначно ответить на этот вопрос в настоящее время не представляется возможным. С одной стороны, увеличение размеров токамака при неизменном коэффициенте запаса устойчивости  $q$  должно приводить к уменьшению отношения  $E/E_D$ , поскольку  $\frac{E}{E_D} \sim \frac{B_0 T_e^{5/2}}{R n_e q}$ . К этому же приводит и увеличение плотности плазмы при неизменном магнитном поле. Однако, с другой стороны, в токамаках-реакторах температура электронов также должна быть существенно выше достигнутых к настоящему времени значений  $T_e \sim 1$  кэВ, а увеличение температуры резко увеличивает отношение  $E/E_D$ . Так что проблема образования убегающих электронов в токамаках-реакторах остается открытой, и поэтому не излагалась подробно в настоящем обзоре. По этой причине в обзоре не рассматривался вопрос об образовании убегающих электронов на начальной нестационарной стадии разряда. И наконец, следует упомянуть о появившемся недавно предложении использовать убегающие электроны для создания в токамаках квазистационарного тока — эта идея также весьма далека от завершения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровский Г. А., Кузнецов Э. И., Разумова К. А. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1970, т. 59, с. 1103.
2. Берлизов А. Б. и др. — Атомная энергия, 1977, т. 43, с. 90.
3. Vlasenkov V. S. e. a. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 509.
4. TFR Group. — Ibid., 1976, v. 16, p. 473.
5. Аликаев В. В., Разумова К. А., Соколов Ю. А. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 303.
6. Веденов А. А. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 203.
7. Omens A. A. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 255.

8. TFR Group. — In.: 5th Int. Conf. on Plasma Physics and Conf. Nucl. Fusion Res., Tokyo, 1974, v. 1, p. 135.
9. TFR Group. — In.: 7th European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Physics, Lausanne, 1975, v. 1, p. 132.
10. Brossier P. e. a. — In.: 6th Int. Conf. on Plasma Physics and Conf. Nucl. Fusion Res., Berchtesgaden, 1976, v. 1, p. 403.
11. Трубинков Б. А. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1, М., Госатомиздат, 1963, с. 98.
12. Dreiser H. — Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 238; Dreiser H. — Ibid., 1960, v. 117, p. 239.
13. Гуревич А. В. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1960, т. 39, с. 1296.
14. Лебедев А. Н. — Там же, 1965, т. 48, с. 1393.
15. Kulsrud R. M. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 690.
16. Kruskal M., Bernstein J. B. — Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 407.
17. Cohen R. H. — Ibid., 1976, v. 19, p. 239.
18. Connor J. W., Hastie R. I. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 415.
19. Parail V. V., Pogutse O. P. — Ibid., 1978, v. 18, p. 303.
20. Морозов А. И., Соловьев А. С. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2, М., Госатомиздат, 1963, с. 177.
21. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7, М., Атомиздат, 1973, с. 208.
22. Gurevich A. V., Dimant Ya. S. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 629.
23. Соколов Ю. А. — Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 244.
24. TFR Group III Int. Congress on Waves and Instabilities in Plasmas, Palaiseau, France, 1977.
25. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, Т. 1. Изд. 2, М., Атомиздат, 1975.
26. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 53, с. 2025.
27. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Там же, 1968, т. 54, с. 1187.
28. Якименко В. Л. — Там же, 1963, т. 44, с. 1534.
29. Параил В. В., Погуце О. П. — Физика плазмы, 1976, т. 2, с. 125.
30. Duk — In Snoi, Horton W. — Fusion Res. Center Report N120, Dec. 1976.
31. Papadopoulos K., Hui B., Winsor W. — Nucl. Fusion, 1977, v. 17, p. 1087.
32. Liu C. S. e. a. — Phys Rev Lett., 1977, v. 39, p. 701.
33. Роуландс Д. Ж., Сизоненко В. Л., Степанов К. Н. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1966, т. 50, с. 979.
34. Роуландс Д. Ж., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Там же, 1966, т. 50, с. 979.
35. Liu C. S., Mok Y. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 162.
36. Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. Пер. с англ. М., Мир, 1971, с. 253.
37. Strachan J. D. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 743.
38. Sesnic S., Fussmann G. Max-Planck Institute für Plasma Physiks. I.PP III/29, 1976.
39. Fussmann G., Glock E., Zehrfeld H. P. VIIth Int. Conf. on Plasma Physics and Conf. Nucl. Fusion Rev., Innsbruck, Austria, IAEA-CN-37/T-4, 1978.
40. Булыгинский Д. Г. и др. — Физика плазмы, 1980, т. 6, с. 860.
41. Кадомцев Б. Б. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4, М., Атомиздат, 1964, с. 188.
42. Molvig K., Tekula M. S., Bers A. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1404.
43. Parail V. V., Pogutse O. P. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 1357.
44. Гуревич А. В. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 733.
45. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. В кн.: Вопросы теории плазмы, Вып. 7, М., Атомиздат, 1973, с. 3.
46. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
47. Брейzman Б. Н., Захаров В. Е., Мушер С. Л. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 64, с. 1297.
48. Рубенчик А. М. — Там же, 1975, т. 68, с. 1005.

# БАЛЛОННЫЕ ЭФФЕКТЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

О. П. Погуце, Э. И. Юрченко

## Введение

Термоядерный реактор на основе токамака может представлять практический интерес лишь при относительно большом давлении плазмы, когда отношение газокинетического давления к давлению магнитного поля  $\beta = 8\pi\bar{r}/B^2$  порядка 5—6% [1]. При таком давлении тепловая энергия плазмы становится одного порядка с магнитной энергией продольного тока. До недавнего времени основной источник неустойчивости плазмы в токамаках был связан с энергией продольного тока, которая питает самую мощную неустойчивость — винтовую. При правильном выборе профиля тока и наличии кожуха или обратных связей винтовая неустойчивость может быть подавлена. При повышении давления все большую роль начинают играть неустойчивости, энергетическим резервуаром которых является тепловая энергия плазмы. Это так называемые баллонные моды желобковой и винтовой неустойчивостей, проявляющиеся в развитии возмущений на внешнем обводе тора.

Баллонные моды, связанные с кривизной силовых линий и градиентом давления, плазмы могут ограничить предельно допустимое давление в токамаке. Физическая природа возникающих ограничений будет рассмотрена в настоящем обзоре и это позволит увидеть, какие же существуют возможности для ослабления ограничений и какие максимальные давления могут быть достигнуты.

Исторически первой работой, связанной с рассматриваемой проблемой, является работа Сайдема [2] (1958), в которой был получен критерий устойчивости цилиндрического плазменного шнура с током относительно желобковых возмущений, постоянных вдоль силовых линий:

$$S^2/4 + 8\pi r' r/B_0^2 > 0, \quad (B.1)$$

где  $S = q'r/q$ ;  $q = rB_\theta/RB_J$  — коэффициент запаса;  $B_0$  — продольное поле;  $B_J$  — поле тока;  $R$  — радиус эквивалентного тора.

Этот критерий имеет наглядный физический смысл: первый член описывает стабилизирующее влияние шира (изменения наклона силовых линий с радиусом), а второй член показывает, что градиент давления плазмы при наличии кривизны силовых линий является причиной неустойчивости.

В 1960 г. Мерсье на основе энергетического принципа получил критерий устойчивости тороидального плазменного шнура произвольного сечения относительно мелкомасштабных желобковых возмущений



[3]. Этот критерий не обладал физической наглядностью, поэтому понадобилось много лет и усилий большого числа теоретиков, чтобы понять его место в исследованиях устойчивости [4—13].

Анализ устойчивости плазмы в тороидальной геометрии связан с использованием довольно громоздкого математического аппарата, что существенно затрудняет понимание и интерпретацию полученных результатов, поэтому наряду с полномасштабными исследованиями решались также и модельные задачи для выяснения конкретных физических механизмов неустойчивости [14, 15].

В 1966 г. Фюрт, Киллен, Розенблют и Коппи рассмотрели устойчивость плазмы в плоской геометрии, моделируя влияние кривизны силовых линий переменной силой тяжести, и обнаружили баллонную неустойчивость [14]. Оказалось, что в этой модели желобковые возмущения не постоянны вдоль силовых линий, как это было в цилиндрической геометрии, где кривизна силовых линий постоянна, а увеличены в области неблагоприятной кривизны и подавлены в благоприятной области. Критическое давление, при превышении которого начинается баллонная неустойчивость, зависит от соотношения длин участков силовых линий с неблагоприятными и благоприятными кривизнами.

В токамаках кривизна силовых линий переменна, она неблагоприятна на внешнем обводе и благоприятна на внутреннем обводе тора. Соотношение длин соответствующих участков силовых линий фиксировано, но оценка критического давления по модельной формуле для токамаков не представляет интереса. Это обусловлено недостатком модели, в которой не учитывалось влияние конечного давления плазмы на глубину магнитной ямы. Магнитная яма в токамаках возникает из-за относительного смещения магнитных поверхностей наружу от центра симметрии тора и играет стабилизирующую роль. Расчеты глубины магнитной ямы в токамаках были проведены Л. С. Соловьевым и В. Д. Шафрановым в 1966 г. [16].

Для исследования баллонной неустойчивости в токамаках Б. Б. Кадомцев и О. П. Погуце в 1966 г. разработали метод, основанный на разложении уравнений малых колебаний по степеням малого параметра  $B_z^2/B_0^2$ . Этот метод позволяет существенно упростить расчеты в тороидальной геометрии, так как разложение уравнений малых колебаний по отношению полей имеет глубокий физический смысл: магнитно-звуковые колебания, приводящие к сжатию и разряжению силовых линий и подавляемые сильным продольным полем, отбрасываются, ионно-звуковые колебания, не возмущающие магнитного поля, отщепляются, а рассматриваются лишь наиболее опасные альфвеновские колебания, связанные с искривлением силовых линий магнитного поля.

Разработанный метод позволил Б. Б. Кадомцеву и О. П. Погуце получить критерий устойчивости, являющийся обобщением критерия Сайдема на случай тора с круговыми магнитными поверхностями [17]:

$$S^2/4 + 8\pi r' r/B_0^2 + \alpha U - \alpha^2/2 > 0, \quad (B.2)$$

где  $U$  — магнитная яма;  $\alpha = -8\pi r' R q^2/B^2$ .

В этом критерии первые два члена — цилиндрические, третий и четвертый члены — тороидальные, характеризующие стабилизирующие влияние магнитной ямы и дестабилизирующий баллонный эффект соответственно.

В 1967 г. В. Д. Шафранов и Э. И. Юрченко, используя метод Б. Б. Кадомцева и О. П. Погуце, учли эффект, связанный с изменением шага силовой линии от азимута, и показали, что критерий устойчивости может быть записан в компактном виде [18]:

$$\frac{S^2}{4} + \frac{8\pi p' r}{B_0^2} (1 - q^2) > 0. \quad (\text{В.3})$$

Уйэр и Хааз получили этот же критерий независимо из энергетического принципа [19].

Из сравнения выражений (В.2) и (В.3) видно, что в токамаке с круговыми поверхностями баллонный эффект и углубление магнитной ямы, за счет конечного давления плазмы, полностью сократились. Оставшийся в (В.3) тороидальный член, пропорциональный  $q^2$ , характеризует стабилизирующее влияние геометрической части магнитной ямы, которая имеется в токамаке при нулевом давлении. При  $q(r) > 1$  баллонная неустойчивость не ограничивает допустимое давление плазмы. Этот результат полного исчезновения баллонного эффекта вызывал некоторые сомнения, но так как он был справедлив при условии  $\epsilon\beta_J \ll 1$  ( $\epsilon = r/R$  — тороидальная кривизна,  $\beta_J = 8\pi r/B_J^2$ ), которое использовалось при получении критерия (В.3), то считалось, что выход из этого парадокса можно найти, учитывая высшие члены разложения по параметру  $\epsilon\beta_J$  [20, 21].

Применяя общегеометрический критерий Мерсье [3] к токамаку с круговыми поверхностями, В. Д. Шафранов и Э. И. Юрченко показали, что в этом случае он также принимает вид (В.3) [18]. Поскольку метод малых колебаний и критерий Мерсье привели к одинаковому результату в рассмотренной конфигурации, то это дало основание при исследовании устойчивости плазмы в более сложных магнитных системах (токамаках с некруглыми магнитными поверхностями и стеллараторах), где метод малых колебаний сопряжен с математическими трудностями, использовать общегеометрический критерий [22—28].

Критерий Мерсье по своему выводу является необходимым критерием устойчивости плазмы в тороидальных магнитных конфигурациях относительно мелкомасштабных возмущений, но так как в течение многих лет не было найдено более жесткого критерия, то в ряде работ появились утверждения о его достаточности.

Ошибочность этих утверждений стала очевидной в 1977 г., когда принстонская группа теоретиков опубликовала результаты численных расчетов, из которых следовало, что при выполнении критерия Мерсье плазма с закрепленной границей в токамаке не устойчива при давлении, большем критического [29]. Критическое давление плазмы в токамаке с круговыми магнитными поверхностями оказалась порядка 1—3% в зависимости от профилей тока и давления. Таким образом, возникло теоретическое ограничение на возможность осуществления

зажигания в токамаке. Результат принстонской группы был сразу же подтвержден Бейтманом и Пенгом [30] и не вызывал сомнений. Проведенный рядом авторов анализ указывал на развитие баллонных мод желобковой неустойчивости, проявляющихся в концентрации возмущений на внешнем обводе тора [31, 32]. Для выяснения физической природы этой неустойчивости и ее отличия от исследованной ранее баллонной неустойчивости требовалось нахождение аналитического критерия устойчивости таких мод.

Помимо чисто технических трудностей аналитического решения существовала и принципиальная проблема, связанная с характером уравнений малых колебаний, описывающих баллонные моды. Так как рассматриваемые желобковые возмущения сильно вытянуты вдоль силовых линий, которые при наличии шира не замыкаются при обходе вокруг тора (за исключением рациональных магнитных поверхностей), то существовавшая техника приводила к обыкновенным дифференциальным уравнениям в реальном пространстве, имеющим как периодические так и непериодические коэффициенты. Возникла проблема, как интерпретировать и как решать такие уравнения, ведь всякое физически реализуемое возмущение должно быть периодическим.

Эта проблема была решена Коннером, Хасты и Тэйлором [11] и независимо Ли и Ван Дамом [59]. Ими был развит метод исследования уравнений малых колебаний, являющихся системой уравнений в частных производных, приводящий к исследованию решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения имеют как периодические, так и непериодические коэффициенты, но их нужно решать не в обычном, а в фурье-пространстве, при этом физические возмущения являются, естественно, периодическими. Для аналитического решения таких уравнений О. П. Погуце и Э. И. Юрченко [33] разработали вариационный асимптотический метод, который позволил им получить критерий устойчивости баллонных мод желобковой неустойчивости для токамака с круговыми поверхностями:

$$\frac{1}{2} S^2 + \frac{8\pi\rho' r}{B_0^2} (1 - q^2) - \frac{3}{2} \alpha \exp\left(-\frac{1}{|S|}\right) - \frac{1}{2} S \alpha^2 > 0. \quad (\text{B.4})$$

Критерий (B.4) при спадающем профиле тока является более жестким, чем критерий (B.3), и дает ограничение на допустимое давление плазмы, так как учитывает два новых физических эффекта, связанных с широм. Экспоненциальный неаналитический по шире член описывает эффект пересечения ветвей колебаний, локализованных на соседних рациональных поверхностях. Последний член, пропорциональный  $S\alpha^2$ , характеризует баллонный эффект, связанный с широм. Этот новый баллонный эффект играет существенную роль, так как обычный баллонный эффект, пропорциональный  $\alpha^2$  в рассматриваемом случае, уничтожается магнитной ямой, как и в критерии (B.3).

Актуальность проблемы баллонных мод, связанная с успехами дополнительных методов нагрева, позволивших существенно поднять давление плазмы в экспериментальных установках, привлекла внимание теоретиков. За короткое время было выполнено большое число ра-

бот по расчетам устойчивости конкретных конфигураций [34—40]. Интересный результат был независимо получен Мерсье [12], Фильдингом и Хаазом [36] и Захаровым [38] в 1978 г.; они обнаружили численно при большом давлении плазмы вторую зону устойчивости.

Выше шла речь о мелкомасштабных возмущениях, для которых легче использовать аналитические методы.

Крупномасштабные колебания плазмы, в отличие от мелкомасштабных, существенным образом зависят от конкретных распределений ее параметров. Для них не удастся написать критерии неустойчивости, которые годились бы при произвольных распределениях, поэтому к исследованию крупномасштабных мод привлекают численные методы.

Первые результаты о дестабилизирующем влиянии тороидальных эффектов на винтовые колебания были получены Бейтманом в 1971 г. и Фрайдбергом, Хаазом и Гроссманом в 1974—1975 гг. при численных расчетах устойчивости тороидального плазменного шнура со скинриновым током [41—43]. Авторы этих работ пришли к выводу, что винтовые возмущения в этой модели имеют баллонную природу, т. е. выпирают на внешнем обводе тора. Были рассчитаны также зависимости критического  $\beta$  от тороидальности и коэффициента запаса устойчивости.

В 1977 г. в Принстоне и Ок-Ридже были проведены численные расчеты устойчивости тороидальной плазмы со свободной границей при произвольных распределениях тока по сечению шнура. Было показано, что с ростом  $\beta$  условия устойчивости ухудшаются, а при  $\beta$ , большем критического, области устойчивости вообще отсутствуют [29, 30].

Этот результат сразу же был объяснен на аналитической модели О. П. Погуце и Э. И. Юрченко [44]. Оказалось, что вырожденный спектр колебаний цилиндрического плазменного шнура, полученный В. Д. Шафрановым в 1970 г. [45], расщепляется при учете тороидальности. Это расщепление аналогично расщеплению зонной структуры электронного спектра твердого тела. Величина расщепления определяется баллонным эффектом  $\pm \epsilon\beta_J$ , т. е. один из новых уровней всегда менее устойчив, чем исходный невырожденный.

Подробные расчеты влияния формы сечения плазменного шнура и границы плазмы на предельно допустимое давление были выполнены в 1978 г. в Принстоне [46].

До сих пор мы обсуждали устойчивость тороидальной плазмы с бесконечной проводимостью. Реальная плазма всегда обладает конечной проводимостью, т. е. отсутствует полная вмороженность плазмы в магнитное поле. Это приводит к диссипативным неустойчивостям, которые развиваются гораздо легче, чем идеальные.

История исследования устойчивости плазмы относительно желобковых возмущений при учете диссипации за счет конечной проводимости началась с работы Фюрта, Киллена и Розенблюта в 1963 г. [47]. В плоской геометрии, моделируя кривизну введением эффективной силы тяжести, они показали, что учет конечной проводимости приводит к неустойчивости в плазме, которая была устойчива в рамках идеальной гидродинамики.

В 1967 г. Грин и Джонсон, исследуя устойчивость тороидального плазменного шнура малого давления, получили критерий при учете диссипации [48], аналогичный общегеометрическому критерию Мерсье для идеальной плазмы. Основной эффект учета конечной проводимости заключался в исчезновении стабилизирующего влияния шира.

Последовательный учет конечного давления плазмы в произвольной геометрии, т. е. учет баллонного эффекта и углубления ямы за счет давления, при наличии диссипации из-за конечной проводимости был проведен Глассером, Грином и Джонсоном в 1975 г. [49]. Независимо от этой работы, А. Б. Михайловский получил критерий устойчивости для токамака с круговыми поверхностями [50]:

$$8\pi r' r / B_0^2 + \alpha U - \alpha^2 / 2 > 0. \quad (B.5)$$

Позже было показано, что этот же критерий следует также из работы [49]. Из наглядных физических соображений А. Б. Михайловский оценил глубину магнитной ямы при большом давлении и отметил ее насыщение [51].

При давлении плазмы, большем критического, баллонный эффект превосходит углубление магнитной ямы и плазма становится неустойчивой, что следует из критериев (B.2) и (B.5). Диссипативная неустойчивость (B.5) начинает развиваться раньше, чем идеальная (B.2), а из-за отсутствия стабилизации широм критерий (B.5) дает более мягкое ограничение на допустимое давление, чем критерий (B.2). Это естественный результат, так как диссипативные неустойчивости должны развиваться при условиях, когда идеальные неустойчивости запрещены.

Успехи в исследованиях идеальных баллонных мод желобковой неустойчивости в 1977—1978 гг. вновь сделали актуальным учет диссипации. Более того, из сравнения критерия идеальных баллонных мод (B.4) с диссипативным критерием (B.5) следовал парадокс: порог по величине градиента давления, с которого начинается неустойчивость, для идеальных баллонных мод оказался меньше порога, следующего из диссипативного критерия (B.6).

Первая попытка разрешить парадокс была предпринята Бейтманом и Нильсоном в 1978 г. [52], они показали, что в диссипативной тороидальной плазме при любом сколь угодно малом градиенте давления существует неустойчивость с малым инкрементом порядка обратного скин-времени  $\gamma \sim 1/\tau_s$  ( $\tau_s = 4\pi\sigma_0 r^2/c^2$ ). Это не сняло парадокса, так как пороговая диссипативная неустойчивость, развивающаяся при нарушении критерия (B.5), имела гораздо больший инкремент  $\gamma \sim \tau_s^{-1} (\tau_s/\tau_\theta)^{2/3}$  ( $\tau_\theta = \sqrt{4\pi\rho_0 r/B_J}$  — альфвеновское время по полю тока, в высокотемпературной плазме отношение скин-времени к альфвеновскому велико).

В 1979 г. О. П. Погуце и Э. И. Юрченко, используя метод разложения уравнений малых колебаний по степеням отношения полей  $B_J/B_0^2$  [17], нашли беспороговые диссипативные баллонные моды с большим инкрементом  $\gamma \sim \tau_s^{-1} (\tau_s/\tau_\theta)^{2/3}$  и тем самым полностью разрешили парадокс [53].

**ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ  
УСТОЙЧИВОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ**

**§1.1. Равновесие плазмы и системы координат**

Исследования устойчивости плазмы в токамаках удобно проводить в специальных криволинейных координатах  $a, \theta, z$ , в которых магнитные поверхности, представляющие собой систему вложенных торов, совпадают с координатными поверхностями  $a = \text{const}$ , а угловая переменная  $\theta$  может быть выбрана так, что силовые линии на поверхности  $a = \text{const}$  являются прямыми. Квадрат

элемента длины в этой системе координат имеет следующий вид:

$$dl^2 = g_{11}da^2 + 2g_{12}dad\theta + g_{22}d\theta^2 + g_{33}dz^2. \quad (1.1)$$

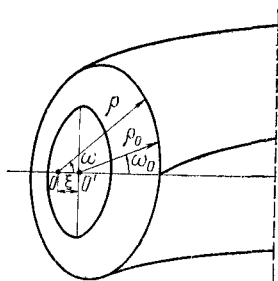


Рис. 1. Связь квазицилиндрических координат  $\rho, \omega$  с полярным  $\rho_0, \omega_0$ . Точка  $O$  — магнитная ось, точка  $O'$  — центр магнитной поверхности  $a = \text{const}$

Метрические коэффициенты  $g_{ik}$ , входящие в эту формулу, определяются формой сечения магнитных поверхностей. Для осесимметричных токамаков, которые мы будем рассматривать в дальнейшем,  $g_{ik}$  не зависят от продольной координаты  $z$ . В этом параграфе для большей наглядности аналитических расчетов ограничимся случаем эллиптических магнитных поверхностей, не сильно отличающихся от круговых. Случай произвольной эллиптичности с учетом треугольности будет рассмотрен в § 2.4, где будет выведен критерий устойчивости шнура с некруговым сечением.

В качестве исходной для расчета возьмем квазицилиндрическую систему координат, связанную с магнитной осью тороидального шнура:

где  $\rho$  — расстояние от магнитной оси;  $\omega$  — азимутальный угол;  $k = 1/R$  — кривизна магнитной оси.

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + (1 - k\rho \cos \omega)^2 dz^2, \quad (1.2)$$

Магнитные поверхности в токамаках смещены относительно магнитной оси на величину  $\xi(a)$ , зависящую от давления плазмы, поэтому естественно перейти от квазицилиндрических координат  $\rho, \omega$  к полярным  $\rho_0, \omega_0$ , связанным со смещенными центрами магнитных поверхностей (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \omega &= \rho_0 \cos \omega_0 + \xi(a); \\ \rho \sin \omega &= \rho_0 \sin \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Уравнение магнитных поверхностей представим в виде

$$\rho_0 = a + \eta(a) \cos 2\theta, \quad (1.4)$$

где  $\eta(a)/a \ll 1$ .

Азимутальный угол  $\omega_0 = \omega_0(a, \theta)$  выберем в виде разложения

$$\omega_0 = \theta + \lambda(a) \sin \theta + \mu(a) \sin 2\theta, \quad (1.5)$$

где  $\lambda(a)$  и  $\mu(a)$  — параметры, которые введены для выпрямления силовых линий.

Подставляя приведенные выражения в формулу для элемента длины (1.2), нетрудно найти искомые метрические коэффициенты в необходимом для дальнейших расчетов приближении по кривизне ( $\xi/a \sim ka \ll 1$ ) [18]:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 + 2\xi' \cos \theta + \left( 2\eta' - \frac{1}{2} a^2 \lambda'^2 + \xi' \lambda - a\xi' \lambda' \right) \cos 2\theta; \\ g_{12} &= (a^2 \lambda' - a\xi') \sin \theta + \left( a^2 \mu' - 2\eta - a\xi' \lambda + \frac{1}{2} \lambda \lambda' \right) \sin 2\theta; \\ g_{22} &= a^2 \left[ 1 + 2\lambda \cos \theta + \left( 2\eta/a + 4\mu + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) \cos 2\theta \right]; \\ g_{33} &= (1 - ka \cos \theta - k\xi + ka\lambda \sin^2 \theta)^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Для расчетов нам также понадобится детерминант метрического тензора:

$$\sqrt{g} = g_{33} (g_{11} g_{22} - g_{12}^2), \quad (1.7)$$

определяющий элемент объема, ограниченный данной магнитной поверхностью:

$$V'(a) = 2\pi R \int_0^{2\pi} \sqrt{g} d\theta. \quad (1.8)$$

В квадратичном приближении по кривизне  $\sqrt{g}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= a \left[ 1 + (\lambda + \xi' - ka) \cos \theta - k\xi - \frac{1}{2} ka\xi' + \right. \\ &\quad \left. + (\eta' + 2\mu + \eta/a + \lambda\xi' - ka\lambda - ka\xi'/2) \cos 2\theta \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из уравнения силовых линий в криволинейных координатах  $a, \theta, z$ :

$$d\theta/B^\theta = dz/B^z \quad (1.10)$$

видно, что для выпрямления силовых линий на поверхности  $a = \text{const}$  отношение контравариантных компонент магнитного поля  $B^\theta/B^z$  не должно зависеть от переменной  $\theta$  (от  $z$  отношение не зависит из-за осевой симметрии токамака).

Для того чтобы понять, какую связь накладывает это требование на метрические коэффициенты, проинтегрируем уравнение  $(4\pi/c) \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  по поперечному сечению тора:

$$\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} dS_S = \frac{4\pi}{c} \mathcal{Y}(a) = \oint \mathbf{B} d\mathbf{l}_\theta = \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_\theta d\theta = \sqrt{g} B^\theta \int_0^{2\pi} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} d\theta, \quad (1.11)$$

где  $B_i = g_{ik} B^k$  — ковариантная компонента магнитного поля; независимость комбинации  $\sqrt{g} B^\theta$  от  $\theta$  следует из  $\text{div } \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} B^\theta = 0$ . Выражение (1.11) связывает продольный ток  $\mathcal{Y}(a)$ , ограниченный данной магнитной поверхностью с  $B^\theta$ . Аналогичная связь поперечного тока  $I(a)$  с  $B^S$  получается интегрированием этого же уравнения по экваториальному сечению тора (рис. 2):

$$\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S}_0 = -\frac{4\pi}{c} I(a) = \oint \mathbf{B} d\mathbf{l}_S = 2\pi B_S = 2\pi g_{33} B^S. \quad (1.12)$$

Из соотношений (1.11) и (1.12) вытекает, что при выпрямлении силовых линий в выбранной системе координат отношение  $g_{33}/\sqrt{g} \sim \sim B^\theta/B^S$  не зависит от  $\theta$ . Следовательно,  $\lambda(a)$  определяется из условия обращения в нуль коэффициента при  $\cos \theta$ , а  $\mu(a)$  — при  $\cos 2\theta$  в выражении для  $g_{33}/\sqrt{g}$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\xi' - ka; \\ \mu &= -\frac{1}{2} \left( \eta' + \frac{\eta}{a} - \xi'^2 - \frac{3}{2} ka \xi' - \frac{1}{2} k^2 a^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В системе координат с прямыми силовыми линиями уравнение равновесия плазмы  $\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]$  сводится к двум соотношениям:

$$\rho V' = \frac{1}{c} (I' \Phi' - \mathcal{Y}' \chi'); \quad (1.14)$$

$$\chi' \frac{\partial v}{\partial \theta} = c p' (V' - 4\pi^2 R \sqrt{g}), \quad (1.15)$$

а выражения для контравариантных компонент полей и токов имеют простой вид:

$$B^1 = 0; B^\theta = \frac{\chi'}{2\pi \sqrt{g}}; B^S = \frac{\Phi'}{2\pi \sqrt{g}}; \quad (1.16)$$

$$j^1 = 0, j^\theta = \frac{I'}{2\pi \sqrt{g}}; j^S = \frac{\mathcal{Y}' + \partial v / \partial \theta}{2\pi \sqrt{g}}; \quad (1.17)$$

где  $\Phi$  и  $\chi$  — продольный и поперечный магнитный потоки;  $\partial v / \partial \theta$  — периодическая функция, характеризующая ток разделения зарядов.

Для полного задания равновесной конфигурации, которая будет служить основой для исследования устойчивости, осталось рассчитать характеристики магнитных поверхностей:  $\xi(a)$  — величину смещения относительно магнитной оси и  $\eta(a)$  — параметр, характеризующий эллиптичность. Проще всего это сделать, выразив  $j^S$  из уравнения  $(4\pi/c) \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$ :

$$\frac{4\pi}{c} j^S = \frac{1}{\sqrt{g}} - \left( \frac{\partial B_\theta}{\partial a} - \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right). \quad (1.18)$$



и подставив (1.18) в последнее из выражений (1.17):

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \chi' \left[ \frac{g_{22}}{Vg} - \left( \frac{g_{22}}{Vg} \right)_0 \right] \right\} - \chi' \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{Vg} = \frac{4\pi\rho'}{\chi'} (V' - 4\pi^2 R Vg), \quad (1.19)$$

$$\text{где } \left( \frac{g_{22}}{Vg} \right)_0 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_{22}}{Vg} d\theta.$$

Из уравнения (1.19), собирая члены при  $\cos \theta$  и  $\cos 2\theta$ , получаем уравнения для нахождения  $\xi$  и  $\eta$  соответственно:

$$\xi'' + \frac{(aB_J^2)'}{aB_J^2} \xi' = k \left( 1 - \frac{8\pi\rho'a}{B_J^2} \right); \quad (1.20)$$

$$\eta'' + \frac{(aB_J^2)'}{aB_J^2} \eta' - \frac{3\eta}{a^2} = - \frac{12\pi\rho'}{B_J^2} k\xi' - \frac{3}{2} \left( \frac{B_J'}{B_J} + \frac{1}{a} \right) \xi'^2, \quad (1.21)$$

где  $B_J = \mathcal{Y}/2\pi a$ .

Уравнения (1.20) и (1.21) показывают, что смещения магнитных поверхностей пропорциональны первой степени кривизны, а эллиптичность появляется лишь при учете следующего приближения по кривизне. Конечно, речь идет об эллиптичности, не определяемой формой кожуха, а возникающей из-за конечного давления плазмы.

Задавая конкретные распределения давления и тока в плазме, а также форму граничной поверхности или кожуха, можно решить систему (1.20), (1.21). Тем самым полностью определится равновесие и система координат с прямыми силовыми линиями, так как параметры «спрямления»  $\lambda$  и  $\mu$  выражаются через  $\xi$  и  $\eta$  (1.13).

Заметим, что параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  можно распорядиться иначе, а именно сделать поверхность систему координат ортогональной. Для этого необходимо обратить в нуль метрический коэффициент  $g_{12}$  (1.6). В этом случае  $\lambda$  и  $\mu$  выражаются через  $\xi$  и  $\eta$  следующим образом:  $a\lambda' = \xi'$ ,  $a^2\mu' = 2\eta + a\xi'\lambda + \lambda\lambda'/2$ . Однако ортогональная система координат при исследовании устойчивости менее удобна, чем система координат с прямыми силовыми линиями.

## § 1.2. Метод малых колебаний.

### Разложение уравнений по малому параметру

Для получения критериев устойчивости плазмы методом малых колебаний достаточно рассмотреть уравнения равновесия при наличии возмущений. Возможность образования нового равновесного состояния с возмущенным магнитным полем в рамках идеальной магнитной гидродинамики соответствует неустойчивости исходного состояния.

Систему уравнений магнитостатического равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]; \quad (1.22)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (1.23)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.24)$$

можно упростить, воспользовавшись малым параметром  $B_j^2/B_0^2$  [54]. Поэтому запишем ее в виде, удобном для разложения по отношению полей. Вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  представим в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \hat{\alpha} \mathbf{B}, \quad (1.25)$$

где  $\mathbf{j}_\perp$  — поперечная по отношению к магнитному полю  $\mathbf{B}$  компонента,  $\hat{\alpha} = \mathbf{j}\mathbf{B}/B^2$ .

Из условия  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  с учетом (1.24) получаем

$$\mathbf{B} \nabla \hat{\alpha} + \text{div } \mathbf{j}_\perp = 0, \quad (1.26)$$

где  $\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \nabla p]$ , что следует из (1.22).

Теперь вместо уравнения (1.22) и (1.23) будем использовать более удобные уравнения [55]:

$$\mathbf{B} \nabla \hat{\alpha} + c \left[ \nabla \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \right] \nabla p = 0; \quad (1.27)$$

$$B \nabla p = 0. \quad (1.28)$$

Линеаризуем систему уравнений (1.27), (1.28) и (1.24), рассматривая в качестве невозмущенного состояния осесимметричное равновесие  $p_0, \mathbf{B}_0$ . Так как в токамаке продольное поле много больше поля тока, то возмущением продольного поля по сравнению с возмущениями поперечных полей можно пренебречь. Это позволяет из условия  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  выразить возмущения поперечных полей через одну функцию:

$$\tilde{B}^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \tilde{B}^0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial a}, \quad (1.29)$$

где  $\tilde{B}^1$  и  $\tilde{B}^0 \equiv \tilde{B}^2$  — контравариантные компоненты. С учетом выражений (1.29) получаем:

$$\mathbf{B}^0 \nabla \tilde{\alpha} + \mathbf{B} \nabla \hat{\alpha}^0 + \left[ \nabla \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}_0 \right] \nabla \tilde{p} = 0; \quad (1.30)$$

$$\mathbf{B}^0 \nabla \tilde{p} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{dp_0}{da} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad (1.31)$$

где значком ноль отмечены равновесные величины, а тильдой — возмущения,

$$\tilde{\alpha} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{g} B_0^s} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) + \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - 2 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial \theta} \right]. \quad (1.32)$$

Перейдем от функции тока  $\psi$  к функции  $\Phi$ , определяемой соотношением:

$$\psi = \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^s} \Phi, \quad (1.33)$$

что позволит из (1.31) выразить возмущенное давление  $\tilde{p}$  через  $\Phi$

$$\tilde{p} = \frac{p'_0}{\sqrt{g} B_0^s} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (1.34)$$

Нетрудно показать, что формально введенная функция  $\Phi$  (1.33) является с точностью до постоянного множителя электростатическим потенциалом. В самом деле в нашем приближении  $\tilde{B}^1$  и  $\tilde{B}^0$  выражаются через одну компоненту векторного потенциала (1.29), (1.33), а именно  $\tilde{B}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} A_S$ ,  $\tilde{B}^0 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} A_S$ , т. е.  $A_S = -\frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^s} \Phi$ , но как раз такая связь существует между  $A$  и электростатическим потенциалом  $\varphi$  при условии вмороженности. Действительно,

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] = 0, \text{ т. е. } \mathbf{E}_{\parallel} \sim (\mathbf{B}\mathbf{E}) = 0, \text{ но } \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

поэтому  $-\frac{i\omega}{c} (\mathbf{A}\mathbf{B}^0) = \mathbf{B}^0 \nabla \varphi$  или  $A_S = \frac{ic}{\omega} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^s} \varphi$ , что совпадает с предыдущей связью, если положить  $\Phi = \frac{ic}{\omega} \varphi$ .

Подставим выражение для  $\tilde{p}$  (1.34) в (1.30) и с учетом (1.32) получим уравнение для  $\Phi$ :

$$L(\Phi) = \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^s} \sqrt{g} \hat{\Delta}_{\perp} \frac{\mathbf{B} \nabla}{B_0^s} \Phi + \frac{D \left( \frac{4\pi p'_0}{\sqrt{g} B_0^s} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{1}{B_0^s} \right)}{D(a, \theta)} + \frac{D \left( \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^s} \Phi, \frac{4\pi j_0^S}{c B_0^s} \right)}{D(a, \theta)} = 0, \quad (1.35)$$

$$\text{где } \hat{\Delta}_{\perp} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta} \right),$$

$$\frac{D(f, g)}{D(a, \theta)} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial a}.$$

Уравнение (1.35) дает возможность исследовать устойчивость осесимметричных токамаков с произвольной формой сечения магнитных поверхностей. Обсудим физический смысл его членов. Первое слагаемое возникло из-за возмущения магнитного поля и является стабилизирующим. Второе слагаемое описывает баллонные эффекты, источником которых является тепловая энергия плазмы, оно пропорционально  $\epsilon J$  и играет дестабилизирующую роль. Последнее слагаемое, содержащее продольный ток  $j_0^S$ , ответственно за винтовую неустойчивость.

Уравнение (1.35) позволяет изучать границу устойчивости плазмы, т. е. находить критерии устойчивости. Для того чтобы рассчитывать инкременты и частоты колебаний, необходимо в уравнение равновесия (1.22) добавить инерционный член:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} B]. \quad (1.36)$$

Используя метод, развитый выше, можно получить уравнение, описывающее спектр малых колебаний:

$$\omega^2 \left[ \frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{22}}{\sqrt{g} c_A^2} \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{11}}{\sqrt{g} c_A^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{12}}{\sqrt{g} c_A^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{\sqrt{g} c_A^2} \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right] + L(\Phi) = 0, \quad (1.37)$$

где  $c_A^2 = (B_0^2)^2 / 4\pi\rho_0$ , оператор  $L(\Phi)$  — представляет собой левую часть уравнения (1.35).

Для однородного цилиндрического плазменного шнура уравнение (1.37) имеет простой и наглядный вид:

$$\frac{\omega^2}{c_A^2} \Delta_{\perp} \Phi + \hat{k}_{\parallel} \Delta_{\perp} \hat{k}_{\parallel} \Phi + \frac{1}{a} \frac{D \left( \hat{k}_{\parallel} \Phi, \frac{4\pi}{c} \frac{j_0}{B_0} \right)}{D(a, \theta)} = 0, \quad (1.38)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ ,  $\hat{k}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla}{B_0^2}$ . Здесь первые два члена описывают альфвеновские колебания (оператор  $\hat{k}_{\parallel}$  действует вдоль силовых линий). Последнее слагаемое — источник винтовой неустойчивости.

Разложение векторных уравнений малых колебаний (1.36), (1.23) и (1.24) по отношению полей  $B_j^2/B_0^2$  привело к скалярному уравнению для  $\Phi$  (1.37). Это связано с тем, что из трех типов колебаний, описываемых векторными уравнениями: магнитно-звуковые, ионно-звуковые и альфвеновские, остались лишь наиболее опасные — альфвеновские. Магнитно-звуковые колебания, приводящие к сжатию и разряжению силовых линий, что в значительной мере затруднено в токамаках сильным продольным полем, в рассматриваемом приближении отброшены. Ионно-звуковые колебания, представляющие собой распро-

странение звука вдоль магнитного поля, выделились в самостоятельную ветвь  $(\omega^2 + c_s^2 k_{\parallel}^2) \bar{p} = 0$ . Альфвеновские колебания, связанные с искривлением силовых линий, могут приводить к винтовой и желобковой неустойчивостям. Баллонные моды этих неустойчивостей описываются уравнением (1.37).

### § 1.3. Энергетический метод. Упрощение энергетического принципа

Как мы видели в предыдущем параграфе, метод малых колебаний при исследовании устойчивости плазмы в токамаках даже после упрощения привел к уравнению в частых производных, решение которого связано со значительными математическими трудностями. Энергетический метод, заключающийся в исследовании потенциальной и кинетической энергии возмущений плазмы, позволяет судить об устойчивости, не решая задачу на собственные значения, а используя вариационные методы. Вариационная формулировка задачи об устойчивости существенно облегчает исследование, так как, выбирая пробные функции из физических соображений, можно получать необходимые критерии устойчивости.

Известно, что уравнения малых колебаний идеальной плазмы могут быть получены из вариационного принципа наименьшего действия [56]:

$$\delta \int \mathcal{L} dt = 0, \quad (1.39)$$

где  $\mathcal{L}$  — функция Лагранжа, равная разности кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_0 \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dV \quad (1.40)$$

и потенциальной энергии [57]

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \int_{V_i} \left\{ \gamma_0 p_0 (\operatorname{div} \xi)^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}^0])^2 + \xi \nabla p_0 \operatorname{div} \xi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} [\xi \operatorname{rot} \mathbf{B}^0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] \right\} dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_e} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 dV. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь интеграл по  $V_i$  берется по области плазмы, а по  $V_e$  — по вакууму,  $\xi$  — смещение плазмы из положения равновесия.

Функционал (1.39) записан относительно векторной функции  $\xi$ , т. е. относительно трех скалярных функций. Уравнения малых колебаний, используя разложение по отношению полей  $B_z/B_0^0$ , удалось свести к уравнению относительно одной скалярной функции  $\Phi$  (1.37). Это значит, что использование разложения по  $B_z/B_0^0$  в энергетическом принципе должно привести к упрощенному функционалу от одной функции  $\Phi$ . Варьирование этого функционала по  $\Phi$  должно дать

упрощенное уравнение малых колебаний (1.37). Представим вектор смещения  $\xi$  в виде

$$\xi = \xi_{\perp} + \xi_{\parallel}, \quad (1.42)$$

где  $\xi_{\parallel} = \frac{(\xi \mathbf{B}^0)}{B_0^2} \mathbf{B}_0$ , а  $\xi_{\perp}$  — компонента смещения, поперечная по отношению к магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ .

Вместо контравариантных компонент смещения  $\xi$  ( $\xi^1$ ,  $\xi^0$ ,  $\xi^S$ ) удобнее использовать следующие величины [58]:

$$\xi_{\perp}^1 = \xi^1, \quad \xi_{\perp}^0 = \xi^0 - \frac{B_0^0}{B_0^S} \xi_{\parallel}^S, \quad \xi_{\parallel}^S = \xi^S + \frac{B_0^0}{B_0^S} \xi_{\perp}^0, \quad (1.43)$$

имеющие смысл основных компонент продольного  $\xi_{\parallel}$  и поперечного  $\xi_{\perp}$  смещений, оставшиеся компоненты  $\xi_{\parallel}^S$  и  $\xi_{\perp}^0$  в отношении полей  $B_0^0/B_0^S$  раз меньше основных:  $\xi_{\parallel}^0 = \frac{B_0^0}{B_0^S} \xi_{\parallel}^S$ ,  $\xi_{\perp}^S = -\frac{B_0^0}{B_0^S} \xi_{\perp}^0$ .

В выражение для возмущенного поля  $\mathbf{B} = \text{rot} [\xi \mathbf{B}_0]$  входят только поперечные компоненты смещения, поэтому компоненты возмущенного поля выражаются через  $\xi_{\perp}^1$ ,  $\xi_{\perp}^0$ :

$$\bar{B}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} B_0^0 \xi_{\perp}^1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial S} \sqrt{g} B_0^S \xi_{\perp}^1 = (\mathbf{B}^0 \nabla) \xi_{\perp}^1; \quad (1.44)$$

$$\bar{B}^0 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} B_0^0 \sqrt{g} \xi_{\perp}^1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial S} B_0^S \sqrt{g} \xi_{\perp}^0 \frac{B_0^2}{B_0^S B_0^S}; \quad (1.45)$$

$$\bar{B}^S = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} B_0^S \sqrt{g} \xi_{\perp}^1 - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} B_0^S \sqrt{g} \xi_{\perp}^0 \frac{B_0^2}{B_0^S B_0^S}. \quad (1.46)$$

Далее будем пренебрегать величинами порядка  $\beta$  и  $B_j^2/B_0^2$  по сравнению с единицей ( $B_0^2 \simeq B_0^S B_0^S$ ).

Перепишем  $\text{div} \xi$  через  $\xi_{\perp}^1$ ,  $\xi_{\perp}^0$ ,  $\xi_{\parallel}^S$ . Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \text{div} \xi &\simeq \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{g} \xi_{\perp}^1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{g} \xi_{\perp}^0 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \sqrt{g} \xi_{\parallel}^S = \\ &= \text{div} \xi_{\perp} + \mathbf{B}^0 \nabla \frac{\xi_{\parallel}^S}{B_0^S}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Покажем теперь, что третьи и четвертые слагаемые в потенциальной энергии выражаются только через  $\xi_{\perp}^1$  и  $\xi_{\perp}^0$ , т. е.  $\xi_{\parallel}^S$  в них не входит. Используя условие равновесия  $\nabla p_0 = \frac{1}{c} [\mathbf{j}^0 \mathbf{B}^0]$ , получаем:

$$\begin{aligned} \xi \nabla p_0 \text{div} \xi_{\parallel} + \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{B}^0 \xi_{\parallel}] \mathbf{B} &= \xi_{\perp}^1 \frac{dp_0}{da} (\mathbf{B}^0 \nabla) \frac{\xi_{\parallel}^S}{B_0^S} + \\ &+ \frac{\xi_{\parallel}^S}{B_0^S} \frac{dp_0}{da} (\mathbf{B}^0 \nabla) \xi_{\perp}^1 = \text{div} \left( \mathbf{B}^0 \xi_{\perp}^1 \frac{dp_0}{da} \frac{\xi_{\parallel}^S}{B_0^S} \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Интеграл от этого выражения преобразуется в поверхностный и, поскольку нормальная компонента равновесного магнитного поля равна нулю, исчезает. При этом рассматриваемые слагаемые принимают следующий вид:

$$\xi_{\perp}^1 \frac{dp_0}{da} \operatorname{div} \xi_{\perp} - \frac{\sqrt{g}}{c} [j_0^S (\xi_{\perp}^0 \tilde{B}^1 - \xi_{\perp}^1 \tilde{B}^0) + j_0^0 \xi_{\perp}^1 \tilde{B}^S]. \quad (1.49)$$

С учетом (1.47) и (1.49) перепишем выражение (1.41):

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \int_{V_i} \left\{ \gamma_0 \rho_0 (\operatorname{div} \xi_{\perp} + \mathbf{B}^0 \nabla \xi_{\parallel}^S / B_0^S)^2 + \frac{1}{4\pi} \tilde{\mathbf{B}}^2 + \right. \\ \left. + (\operatorname{div} \xi_{\perp} + \mathbf{B}^0 \nabla \xi_{\parallel}^S / B_0^S) \xi_{\perp}^1 \frac{dp_0}{da} - \frac{\sqrt{g}}{c} [j_0^S (\xi_{\perp}^0 \tilde{B}^1 - \xi_{\perp}^1 \tilde{B}^0) + \right. \\ \left. + j_0^0 \xi_{\perp}^1 \tilde{B}^S] \right\} dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_e} \tilde{\mathbf{B}}^2 dV. \quad (1.50) \end{aligned}$$

Кинетическая энергия выражается через компоненты смещения просто:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi_{\perp} + \frac{\xi_{\parallel}^S}{B_0^S} \mathbf{B}_0 \right) \right]^2 dV, \quad (1.51)$$

где  $dV = \sqrt{g} da d\theta dS$ .

Теперь перейдем к варьированию и минимизации функционала с учетом принятых выше допущений. Фактически результат варьирования известен, так как вариационные уравнения — это просто уравнения движения. Поэтому при варьировании лагранжиана  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$  по  $\xi_{\parallel}^S$  получается продольная компонента уравнения движения:

$$\omega^2 \rho_0 B_0^2 \xi_{\parallel}^S / B_0^S = \gamma_0 \rho_0 (\mathbf{B}^2 \nabla) \operatorname{div} \xi. \quad (1.52)$$

Зависимость возмущений от времени выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Подставляя отсюда  $\xi_{\parallel}^S / B_0^S$  в выражение (1.47) для  $\operatorname{div} \xi$ , выразим  $\operatorname{div} \xi$  через  $\operatorname{div} \xi_{\perp}$ :

$$\left[ 1 - \mathbf{B}^0 \nabla \frac{\gamma_0 \rho_0}{\omega^2 \rho_0 B_0^2} (\mathbf{B}^0 \nabla) \right] \operatorname{div} \xi = \operatorname{div} \xi_{\perp}. \quad (1.53)$$

Из дальнейшего будет видно, что  $\operatorname{div} \xi_{\perp}$  является величиной порядка  $\varepsilon = a/R$ , поэтому в рассматриваемом приближении уравнение (1.53), символически разрешенное относительно  $\operatorname{div} \xi_{\perp}$ , принимает вид:

$$\operatorname{div} \xi = \left( 1 - \frac{c_S^2 \hat{k}_{\parallel}^2}{\omega^2} \right)^{-1} \operatorname{div} \xi_{\perp}, \quad (1.54)$$

где  $c_S^2 = \gamma_0 \rho_0 / \rho_0$ .

Разумеется, оператор  $(1 - c_S^2 k_{\parallel}^2 / \omega^2)^{-1}$  является интегральным, однако в выражении (1.54) можно избежать использования интегрального оператора в двух практически важных предельных случаях. В первом при исследовании границы устойчивости, т. е. при  $\omega^2 \rightarrow 0$ , как видно из (1.54), следует полагать  $\operatorname{div} \xi = 0$ . Если же частота  $\omega \sim k_{\parallel} c_A$  — порядка альфвеновской ( $k_{\parallel}$  — продольная компонента волнового вектора  $\mathbf{k}$ ,  $c_A^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0$ ), то  $(1 - c_S^2 k_{\parallel}^2 / \omega^2) \simeq (1 + \gamma_0 \beta) \simeq 1$  и  $\operatorname{div} \xi = \operatorname{div} \xi_{\perp}$  с точностью до членов порядка  $\beta$ . Это и есть условие минимизации по  $\xi_{\parallel}^S$  во втором случае. Эта минимизация справедлива даже для весьма низкочастотных колебаний желобкового типа, когда  $\omega \sim \varepsilon \beta_J k_{\parallel} c_A$ , а  $(1 - c_S^2 k_{\parallel}^2 / \omega^2) \approx \left(1 + \frac{\gamma_0 \beta}{\varepsilon^2 \beta_J^2}\right) \approx 1$  при условии  $\beta_J \gg 1/q^2$ .

Другими словами, рецепт минимизации по  $\xi_{\parallel}^S$  следующий: величина  $\xi_{\parallel}^S$  опускается в инерционном члене, а  $\operatorname{div} \xi$  надо заменять либо нулем при исследовании границы устойчивости, либо  $\operatorname{div} \xi_{\perp}$ , если частота не слишком мала.

Далее, чтобы избавиться еще от одной функции, будем минимизировать функционал (1.50) по функции  $\xi_{\perp}^{\theta}$ . Соответствующее вариационное уравнение есть первая контравариантная компонента линейризованного уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ , где  $\mathbf{j}$  — представлена в виде  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{B} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}) / B^2 + (c/B^2) [\mathbf{B} \nabla p]$ . Здесь мы пренебрегли инерционным членом в  $\mathbf{j}_{\perp}$ , так как он описывает магнитно-звуковые колебания и для рассматриваемых ниже возмущений с частотами  $\omega \lesssim k_{\parallel} c_A$  совершенно несуществен. Впрочем, его нетрудно дописать и прямой оценкой показать, что он мал в принятых выше предположениях.

Итак, вариационное уравнение для  $\xi_{\perp}^{\theta}$  имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{B}_S - \frac{\partial}{\partial S} \tilde{B}_{\theta} \right) = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{\tilde{B}^1 (\mathbf{j}^{\theta} \cdot \mathbf{B}^{\theta})}{B_0^2} + \frac{c}{B_0^2} \frac{1}{\sqrt{g}} \times \right. \\ \left. \times \left( B_0^{\theta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial S} - B_S^{\theta} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (1.55)$$

Пользуясь выражениями для возмущенных полей (1.44)—(1.46) и выражением для возмущенного давления  $\tilde{p} = -\xi_{\perp}^i dp_0 / da - \gamma_0 p_0 \operatorname{div} \xi$ , можно оценить члены в уравнении (1.55) и убедиться, что если пренебречь членами порядка  $\beta$  и  $B_S^2 / B_0^2 = \varepsilon^2 / q^2$  по сравнению с единицей, то оно сводится просто к условию:

$$B_S = 0. \quad (1.56)$$

Это условие минимизации по  $\xi_{\perp}^{\theta}$  имеет простой физический смысл и означает, что мы пренебрегаем магнитно-звуковыми колебаниями.



Условие (1.56) позволяет ввести функцию  $\Phi$ , которая обращает  $\tilde{B}_S$  (1.44) в нуль, следующими соотношениями:

$$\xi_{\perp}^1 = -\frac{1}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \xi_{\perp}^0 = \frac{1}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{\partial \Phi}{\partial a}. \quad (1.57)$$

Компоненты поля  $\tilde{B}^1$  и  $\tilde{B}^0$  симметрично выражаются через  $\Phi$ :

$$\tilde{B}^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \Phi, \quad \tilde{B}^0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \Phi. \quad (1.58)$$

Функция  $\Phi$ , как было показано ранее, с точностью до постоянного множителя — электростатический потенциал.

Выражение  $\text{div } \xi_{\perp}$  после подстановки компонент смещения (1.57) принимает вид

$$\text{div } \xi_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{B_0^S} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{B_0^S} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{D(\Phi, 1/B_0^S)}{D(a, \theta)}. \quad (1.59)$$

После минимизации по  $\xi_{\parallel}^S$  и  $\xi_{\perp}^0$  все величины, входящие в выражения  $W$  (1.50) и  $T$  (1.51), определены через  $\Phi$ . Теперь нетрудно написать окончательные упрощенные выражения для потенциальной и кинетической энергии, справедливые с точностью до  $\varepsilon^2$  [58]:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \hat{\gamma} \rho_0 \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{D(\Phi, 1/B_0^S)}{D(a, \theta)} \right)^2 + \frac{1}{4\pi} \left[ g_{11} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{k}_{\parallel} \Phi \right)^2 + g_{22} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} \hat{k}_{\parallel} \Phi \right)^2 - 2g_{12} \frac{1}{g} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{k}_{\parallel} \Phi \right) \left( \frac{\partial}{\partial a} \hat{k}_{\parallel} \Phi \right) \right] - \frac{\rho_0'}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{D(\Phi, 1/B_0^S)}{D(a, \theta)} + \frac{j_0^S}{c \sqrt{g} B_0^S} \frac{D(\Phi, \hat{k}_{\parallel} \Phi)}{D(a, \theta)} \right\} dV; \quad (1.60)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ g_{11} \left( \frac{\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + g_{22} \left( \frac{\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)^2 - 2g_{12} \frac{\rho_0}{(\sqrt{g} B_0^S)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\} dV. \quad (1.61)$$

Здесь член с  $\hat{\gamma}$  следует понимать в том смысле, как это разъяснено после формулы (1.54). В общем случае вместо  $\hat{\gamma}$  следует писать интегральный оператор  $\hat{\gamma} = \gamma_0 (1 - c^2 \hat{k}_{\parallel}^2 / \omega^2)^{-1}$ . Точка в (1.61) обозначает дифференцирование по времени.

Полученное выражение для потенциальной энергии обладает физической наглядностью. Обсудим смысл отдельных членов. Первый член, пропорциональный  $\hat{\gamma}$ , учитывает эффект сжимаемости, он, как видно, является членом порядка  $\varepsilon^2$ . Другими словами, сжимаемость может проявиться только в этом порядке. Заметим, что в цилиндре

сжимаемость проявляется при учете членов порядка  $B_1^2/B_0^2 = \varepsilon^2/q^2$ , которые мы опускали. Второй член в квадратных скобках — это энергия возмущенного магнитного поля как в плазме, так и в вакууме. Запись единого выражения для возмущений магнитного поля в плазме и вакууме стала возможной из-за формального введения потенциала  $\Phi$  в вакууме согласно соотношению  $A_S = -\frac{B_0 \nabla}{B_0^S} \Phi$ , что эквивалентно введению в вакууме формального смещения согласно  $\mathbf{B}_0 = \text{rot} [\xi \mathbf{B}^0]$ . Разумеется, физический смысл имеет только комбинация  $[\xi \mathbf{B}^0]$ , представляющая собой векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , а не каждый член в отдельности. Это позволяет выбрать в вакууме фиктивное поле так, чтобы силовые линии были прямыми, т. е.  $B_0^\theta \sim B_0^S$ . Заметим, что фиктивное магнитное поле не имеет никакого отношения к магнитному полю в вакууме.

Подчеркнем, что все компоненты поля пропорциональны оператору  $\hat{k}_\parallel = \mathbf{B}^0 \nabla / B_0^S$ , таким образом, около резонансных поверхностей, где  $k_\parallel \simeq 0$ , магнитное поле не влияет на устойчивость. Третий член пропорционален  $\varepsilon dp_0/da$ , т. е. он появляется только в тороидальной геометрии. Этот член порождает баллонные моды желобковой и винтовой неустойчивостей. Последний член описывает влияние тока и в нем тороидальные поправки носят чисто геометрический характер. Этот член — источник винтовой неустойчивости.

## ГЛАВА 2

### БАЛЛОННЫЕ МОДЫ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### § 2.1. Метод эквивалентных гармоник

При исследовании устойчивости плазмы потенциал  $\Phi$ , описывающий колебания, обычно раскладывают в ряд Фурье:

$$\Phi(a, \theta, z) = \sum_{m, n} \Phi_{mn}(a) \exp \left\{ - \left[ im\theta - i \frac{n}{R} z \right] \right\}. \quad (2.1)$$

В токамаках с осевой симметрией гармоники по  $z$  являются независимыми и можно рассматривать одну  $n$ -ю гармонику. Гармоники по  $\theta$  из-за наличия тороидальной кривизны зацеплены между собой, и это порождает основную техническую трудность расчетов устойчивости плазмы в токамаках.

Устойчивость плазмы относительно низких гармоник в основном рассчитывают численными методами. Высокие гармоники удобнее исследовать аналитически, так как они сильно локализованы по радиусу шнура, что позволяет получать локальные критерии устойчивости плазмы при произвольных распределениях равновесных величин.

Из выражения для потенциальной энергии  $W$  (1.60) видно, что стабилизирующее влияние магнитного поля пропорционально квадрату оператора  $\hat{k}_\parallel = \mathbf{B}^0 \nabla / B_0^S$ , который при действии на фурье-гармонику

дает  $\hat{k}_{\parallel} = -iB_0^0/B_0^S (m - nq(a))$ . Это значит, что возмущения, сильно вытянутые вдоль магнитного поля и локализованные около резонансных поверхностей  $a_m (q(a_m) = m/n)$ , слабо возмущают магнитное поле и, таким образом, представляют наибольшую опасность с точки зрения устойчивости. Высокие моды таких возмущений принято называть желобковыми.

В пределе больших номеров гармоник  $m \simeq nq \gg 1$  можно считать, что все гармоники по  $\theta$  эквивалентны, т. е. мало отличаются друг от друга (рис. 3). При этом каждая  $m$ -я гармоника «сидит» на своей рациональной поверхности и может быть получена из любой другой сдвигом по радиусу шнура. Этому соответствует следующий выбор  $\Phi_{mn}(a)$  [38]:

$$\Phi_{mn}(a) \simeq \Phi_n(m - nq(a)). \quad (2.2)$$

Сдвиг или расстояние между соседними рациональными поверхностями легко получаются из условий резонанса  $m$ -й ( $m - nq = 0$ ) и  $(m + 1)$ -й ( $m + 1 - nq = 0$ ) мод:  $\Delta a = a_{m+1} - a_m \simeq 1/nq'_m = a_m/nqS$ . Таким образом, при увеличении шири резонансные поверхности сближаются и гармоники, локализованные на соседних поверхностях, могут перекрываться.

Функции (2.2) при фиксированном  $n$  отличаются только индексом  $m$ , что равносильно сдвигу по  $a$ , поэтому естественно разложить эти функции в интеграл Фурье по радиальной переменной  $[m - nq(a)]$ :

$$\Phi_n(m - nq(a)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(a, y) \exp\{i[m - nq(a)]y\} dy, \quad (2.3)$$

где  $F(a, y)$  не зависит от  $m$ !

Нетрудно убедиться, что предположение об эквивалентности гармоник привело к преобразованию, предложенному независимо в работах [11] и [59]. Действительно, подставив (2.3) в (2.1), получим:

$$\begin{aligned} \Phi(a, \theta, z) = \sum_m \exp\left\{-im\theta + i\frac{n}{R}z\right\} \int_{-\infty}^{\infty} F(a, y) \times \\ \times \exp\{i[m - nq(a)]y\} dy = \end{aligned}$$

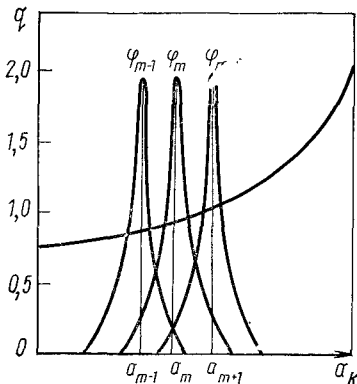


Рис. 3. Азимутальные гармоники возмущения при  $m \gg 1$ , локализованные около соседних резонансных поверхностей

$$= \sum_m \exp \left[ -im\theta + i \frac{n}{R} z \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(imy) \hat{\Phi}(a, y) dy = \quad (2.4)$$

$$= \sum_N F(a, \theta + 2\pi N) \exp \left[ -inq(\theta + 2\pi N) + i \frac{n}{R} S \right]. \quad (2.5)$$

Здесь (2.4) дает преобразование работы [11], а (2.5) совпадает с преобразованием работы [59]. Из этих выражений видно, что периодическая по  $\theta$  функция  $\Phi$  может быть представлена в виде бесконечного ряда непериодических функций. Это преобразование автоматически разрешает проблему, которая возникала при исследовании желобковых возмущений в обычном пространстве. Суть проблемы можно пояснить следующим образом. Уравнение малых колебаний (1.37), описывающее, в частности, желобковую неустойчивость, является уравнением в частных производных по  $a, \theta$ . Характер его решения, в известной мере, ясен заранее. Это должны быть возмущения, сильно вытянутые вдоль силовых линий магнитного поля. Другими словами, для них  $\hat{k}_{\parallel} \Phi \simeq 0$ , в системе координат с прямыми силовыми линиями оператор  $\hat{k}_{\parallel} \sim [\partial/\partial\theta - inq(a)]$ .

Таким образом, требование  $\hat{k}_{\parallel} \Phi \simeq 0$  приводило к решению вида  $\Phi \sim F(a, \theta) \exp[inq(a)\theta]$ , где  $F$  — медленно меняющаяся функция. При больших  $nq$ , что соответствует локальному приближению, самые главные члены возникают при дифференцировании по  $a$  экспоненты  $\partial\Phi/\partial a \simeq inq'\theta F \exp(inq\theta)$ . В результате подстановки  $\Phi$  в виде  $F \exp(inq\theta)$  в исходное дифференциальное уравнение в частных производных получалось обыкновенное дифференциальное уравнение по  $\theta$  (при  $nq \rightarrow \infty$ ), имеющее как периодические, так и непериодические коэффициенты ( $nq'\theta$ ). Возникла проблема как интерпретировать и как решать такое уравнение, ведь функция  $F(\theta)$  должна быть периодической, чтобы реальное возмущение  $\Phi$  было периодическим.

Покажем, что преобразование (2.4) снимает эту проблему, так как теперь нужно будет решать аналогичное уравнение в бесконечном интервале  $-\infty < y < \infty$  относительно фурье-компоненты  $F(y)$ , которая не должна быть периодической, в то время как  $\Phi(\theta)$ , естественно, является периодической функцией.

Уравнение малых колебаний (1.37) запишем символически в стандартной форме для задачи на собственные значения:

$$\mathcal{L}(a, \theta)\Phi(a, \theta) = \omega^2\Phi(a, \theta), \quad (2.6)$$

где  $\mathcal{L}$  — оператор периодический по  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), а функция  $\Phi$  должна быть периодической по  $\theta$  и ограниченной по  $a$ . При подстановке преобразования (2.4) в уравнение (2.6) видно, что любая функция  $\hat{\Phi}(a, y)$ , являющаяся решением уравнения:

$$\mathcal{L}(a, y)\hat{\Phi}(a, y) = \omega^2\hat{\Phi}(a, y) \quad (2.7)$$

в интервале  $-\infty < y < \infty$  порождает периодическую функцию  $\Phi(a, \theta)$  — решение уравнения (2.6), соответствующую тому же са-

мому собственному значению. Можно доказать и обратное утверждение: любому ненулевому периодическому решению уравнения (2.6) действительно соответствует некоторое решение уравнения (2.7) [60].

Другими словами, вместо решения задачи об устойчивости в реальном пространстве, которая требует периодичности, можно решать задачу об устойчивости в фурье-пространстве, так как она дает те же самые собственные значения.

Формальная процедура перехода крайне проста: в уравнении малых колебаний (1.37) и в энергетическом принципе (1.60) и (1.61) достаточно перейти от функции  $\Phi(a, \theta, z)$  к функции  $\hat{\Phi}(a, y, z)$  и во всех операторах заменить переменную  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) на переменную  $y$  в бесконечном интервале  $-\infty < y < \infty$ .

Функцию  $\hat{\Phi}(a, y, z)$  удобно представить в форме эйконала или «квазимоды» [61]:

$$\hat{\Phi}(a, y, z) = F(a, y) \exp \left[ -in q(a) y + i \frac{n}{R} z \right], \quad (2.8)$$

Здесь фаза постоянна вдоль магнитного поля, но очень быстро меняется ( $nq \gg 1$ ) в направлениях, перпендикулярных полю. Амплитуда  $F(a, y)$  является медленной функцией по сравнению с фазой и может рассчитываться разложением по степеням параметра  $1/nq$ .

Перейдем от уравнения (1.37) к соответствующему уравнению в фурье-пространстве, согласно процедуре, описанной выше, и подставим в него  $\hat{\Phi}$  в форме (2.8). Нетрудно убедиться что в пределе  $nq \rightarrow \infty$  главные члены имеют вид (члены, порядка  $1/nq$  по сравнению с главными, опущены):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ G(a, y) \frac{\partial F}{\partial y} \right] - \left\{ \frac{4\pi\rho'_0 R^2 q^2}{\sqrt{g} B_0^S} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{B_0^S} - \frac{S y}{a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_0^S} \right] - \omega^2(a) \tau_0^2 G(a, y) \right\} F = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{где } G(a, y) = a \left( \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{S^2 y^2}{a^2} - 2 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{S y}{a} \right); \quad S = \frac{q' a}{q}.$$

Из уравнения (2.9) видно, что в рассматриваемом приближении проблема устойчивости сведена к решению обыкновенного дифференциального уравнения, имеющего как периодические [в  $g_{ik}$  входят только  $\cos y$  и  $\sin y$  (1.6)], так и непериодические коэффициенты. Переменная  $a$ , характеризующая магнитные поверхности, является здесь параметром. Это означает, что колебания на каждой магнитной поверхности независимы и имеют локальную частоту  $\omega^2(a)$ .

Для нахождения зависимости амплитуды  $F$  от переменной  $a$ , т. е. для полного определения радиальной структуры возмущений и нахождения реального собственного значения  $\Omega^2$ , необходим учет следующего приближения по  $1/nq$ . Соответствующие детальные расчеты бы-

ли проведены в работе [60]. Было показано, что собственное значение определяется выражением следующего вида:

$$\Omega^2 = \omega_{\min}^2(a) [1 + O(1/nq)], \quad (2.10)$$

где поправка  $O(1/nq)$  — положительная величина;  $\omega_{\min}(a)$  — минимальное значение локальной частоты по радиусу. Из этого выражения очевидно, что высокие моды являются наиболее неустойчивыми в пределе  $nq \rightarrow \infty$ .

Аналогичное использование метода эквивалентных гармоник: переход в фурье-пространство, введение «квазимод» и разложение по  $1/nq$  — позволяет записать следующие выражения для главных членов потенциальной (1.60) и кинетической энергий (1.61) [13]:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{a_h} (nq)^2 \left( \frac{B_0^\theta}{B_0^S} \right)^2 da \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G(a, y) \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\pi\rho_0' R^2 q^2}{\sqrt{g} B_0^S} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{B_0^S} - \frac{Sy}{a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_0^S} \right] F^2 \right\} dy; \quad (2.11)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{a_h} (nq)^2 \left( \frac{B_0^\theta}{B_0^S} \right)^2 \tau_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(a, y) (\dot{F})^2 dy. \quad (2.12)$$

Легко убедиться, что, варьируя интеграл по времени от функции лагранжа  $\mathcal{L} = T - W$  и полагая  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$ , получаем уравнение малых колебаний в форме (2.9).

## § 2.2. Асимптотический вариационный метод решения дифференциальных уравнений

Исследования устойчивости плазмы относительно желобковых возмущений в токамаке привели к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, имеющему периодические и неперидические коэффициенты (2.9). Конкретный вид коэффициентов зависит от формы магнитных поверхностей равновесной конфигурации, исследуемой на устойчивость. Точные аналитические решения таких уравнений не известны, поэтому рассмотрим приближенный асимптотический вариационный метод решения [33].

Для простоты изложения продемонстрируем этот метод на примере модельного уравнения, которое учитывает все основные черты уравнения (2.9), но не загромождает вычисления деталями:

$$\frac{d}{dy} (1 + S^2 y^2) \frac{dF}{dy} + (B \cos y + CSy \sin y - U) F = 0. \quad (2.13)$$

Здесь  $S$  — шир,  $U$  — средняя магнитная яма; величины  $B$  и  $C$  характеризуют переменную кривизну силовых линий (баллонный эффект).

Удобно переписать уравнение (2.13), избавившись от первой производной. После замены  $F = u (1 + S^2 y^2)^{-1/2}$  получаем:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - V(y) u = 0, \quad (2.14)$$

где

$$V(y) = \frac{S^2}{(1 + S^2 y^2)^2} + \frac{U - B \cos y - CSy \sin y}{1 + S^2 y^2}. \quad (2.15)$$

При  $S^2 \ll 1$  потенциал  $V(y)$  представляет собой медленно меняющуюся на интервале порядка  $1/S$  яму, на которую наложены быстрые осцилляции, т. е. в уравнении (2.14) есть два масштаба  $y \sim 1/S$  и  $y \sim 1$ . Это позволяет наряду с переменной  $y$  ввести медленную переменную  $t = Sy$ , как это обычно делают в методе усреднения Ван-дер-Поля. Разобьем потенциал  $V(y, t)$  на медленно и быстро меняющиеся части:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(y, t) dy = \frac{S^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{U}{1 + t^2}; \\ \tilde{V} &= V(y, t) - \bar{V} = -\frac{B \cos y + CSy \sin y}{1 + t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Таким же образом представим и решение  $u = \bar{u} + \tilde{u}$ .

Для нахождения осциллирующей части  $\tilde{u}$  при  $U \ll 1$  необходимо решить следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dy^2} \tilde{u} + \frac{B \cos y + CSy \sin y}{1 + S^2 y^2} \bar{u} = 0. \quad (2.17)$$

Решение этого уравнения с любой точностью по степеням  $S$  легко получить интегрированием по частям. В низшем приближении имеем

$$\tilde{u} = \frac{B \cos y + CSy \sin y}{1 + S^2 y^2} \bar{u}. \quad (2.18)$$

Подставляя выражение (2.18) в уравнение (2.14) и усредняя его по быстрым осцилляциям, можно получить уравнение для медленной части решения  $\bar{u}$ :

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} - \langle V \rangle \bar{u} = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\langle V \rangle = \frac{1}{(1 + t^2)^2} + \frac{U}{S^2 (1 + t^2)} - \frac{B^2 + C^2 t^2}{2S^2 (1 + t^2)^2}. \quad (2.20)$$

Если предположить, что  $t^2 \gg 1$ , и сохранить только главные члены, то получится уравнение типа Сайдема с потенциалом  $\langle V \rangle = \frac{(U - C^2/2)/S^2}{t^2}$ . Хорошо известно, что отсутствие собственных ре-

шений такого уравнения соответствует устойчивости плазмы [2] и определяется условием:

$$\frac{1}{4} S^2 + U - \frac{1}{2} C^2 > 0. \quad (2.21)$$

Это условие представляет собой критерий Мерсье для рассматриваемого модельного уравнения (2.14).

Из вывода критерия (2.21) ясно следует, что при этом учитывается лишь далекий «хвост» потенциальной ямы. Однако известно [62], что даже, если условие (2.21) выполнено, собственные решения уравнения (2.19) могут существовать за счет центральной ямы.

Действительно, в критерий (2.21) не входит параметр  $B$ , а глубина центральной ямы определяется им также [см. выражение (2.20)], т. е. при получении критерия Мерсье баллонные эффекты учитываются не полностью. Поэтому при достаточно больших  $B$  будет существовать уровень в потенциальной яме (2.20), а значит, и в потенциальной яме (2.15), несмотря на то, что условие (2.21) выполнено и уровень на «хвосте» потенциальной ямы отсутствует.

Теперь вернемся к уравнению (2.14), для которого имеем решение, полученное асимптотическим разложением по  $S$ :

$$u = \bar{u} \left( 1 + \frac{B \cos y + CSy \sin y}{1 + S^2 y^2} \right). \quad (2.22)$$

Запишем вариационный принцип для уравнения (2.14)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} [(u'_y)^2 + V(y)u^2] dy \quad (2.23)$$

и подставим в качестве пробной функции асимптотическое решение (2.22). При этом в (2.22) параметр  $S$  можно считать не малым, а медленную функцию  $\bar{u}$  находить вариационно или выбирать из физических соображений.

Асимптотический вариационный метод обладает высокой точностью. Во-первых, это происходит потому, что вариационный принцип сам имеет тенденцию повышать точность при подстановке пробной функции, мало отличающейся от собственной. Во-вторых, при этом учитываются, как будет видно дальше, экспоненциальные неаналитические по  $S$  члены  $\exp(-1/|S|)$ , которые принципиально нельзя получить методом усреднения. (Эти экспоненциальные члены учитывают эффекты типа квантовоомеханического просачивания под барьер.)

Эффективность метода при решении уравнений типа (2.14) продемонстрируем на простом примере, когда критерий Мерсье (2.21) заведомо выполнен, а именно, положим  $U = 0$ ,  $C = 0$  (критерий Мерсье при этом  $S^2 > 0$ ).

В этом случае потенциал несколько упрощается:

$$V(y) = \frac{S^2}{(1 + S^2 y^2)^2} - \frac{B \cos y}{1 + S^2 y^2}, \quad (2.24)$$



а пробная функция может быть выбрана в следующем виде:

$$u = 1 + \frac{B \cos y}{1 + S^2 y^2}. \quad (2.25)$$

В этом выражении функция  $\bar{u}$  (2.22), являющаяся медленной функцией и на границе появления первого уровня (неустойчивость) стремящаяся к константе [62], взята равной единице. После подстановки (2.25) в вариационный принцип и интегрирования нетрудно получить следующий критерий устойчивости из условия  $W > 0$ :

$$\frac{1}{4} S^2 - \frac{3}{8} B \exp\left(-\frac{1}{|S|}\right) - \frac{1}{2} B^2 > 0 \quad (2.26)$$

(здесь опущены члены порядка  $S^2$  и  $B^2$  по сравнению с единицей).

Из этого критерия видно, что, несмотря на выполнение критерия Мерсье, в этой модельной задаче плазма может быть неустойчивой из-за баллонного эффекта.

Потенциал уравнения (2.14) обладает двумя характерными чертами: периодической структурой и поведением на бесконечности пропорционально  $1/t^2$ . В рассмотренном примере при  $U = 0$  и  $C = 0$  основное внимание было уделено быстрой периодической части пробной функции, играющей здесь определяющую роль. Для того чтобы разобраться в роли медленной части пробной функции, обратимся к уравнению (2.19), но в качестве примера возьмем потенциал, допускающий точное аналитическое решение:

$$\langle V \rangle = \begin{cases} B^* & 0 \leq t \leq 1; \\ -M/t^2 & 1 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (2.27)$$

Здесь величина  $B^*$  характеризует глубину центральной части ямы, а  $M$  регулирует поведение потенциала на бесконечности.

Для этого потенциала критерием Мерсье является  $M < 1/4$ . Необходимый и достаточный критерий устойчивости, определяющий истинную границу устойчивости, легко получить из шивки при  $t = 1$  логарифмических производных решений:

$$\bar{u} = C_1 \begin{cases} \operatorname{ch} B^* t, & B^* > 0 \\ \cos |B^*| t, & B^* < 0 \end{cases} \quad t \leq 1; \quad (2.28)$$

$$u = C_2 t^{\frac{1}{2}} (1 - \sqrt{1 - 4M}) \quad t \geq 1. \quad (2.29)$$

При этом граница устойчивости определяется следующим выражением:

$$\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4M}) = \begin{cases} \sqrt{B^*} \operatorname{tg} \sqrt{B^*}, & B^* > 0; \\ -\sqrt{|B^*|} \operatorname{tg} \sqrt{|B^*|}, & B^* < 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Теперь решим эту же задачу вариационным методом. Для этого подставим в вариационный принцип (2.23) с потенциалом (2.27) в качестве пробной функции функцию  $\bar{u} = 1$  и из условия  $W = 0$  получим

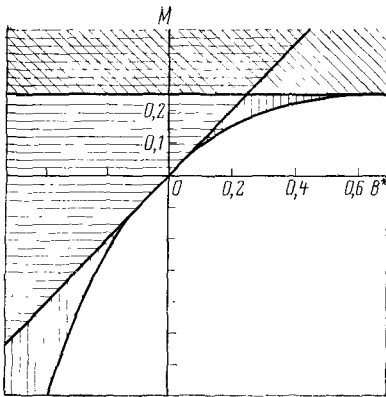


Рис. 4. Диаграмма устойчивости.

Наклонными линиями заштрихована область, где нарушен критерий Мерсье ( $M > 1/4$ ), горизонтальная штриховка указывает на нарушение критерия баллонных мод ( $M > B$ ), вертикальной штриховкой отмечена область, где выполнены оба необходимых критерия, но нарушен необходимый и достаточный критерий устойчивости

полнен критерий баллонных мод и критерий Мерсье, но тем не менее нарушен необходимый и достаточный критерий устойчивости. Таким образом, рис. 4 дает наглядное представление о связи необходимых критериев устойчивости (критерия Мерсье и критерия баллонных мод) с необходимым и достаточным критерием устойчивости

### § 2.3. Аналитический критерий устойчивости баллонных мод

Основой для получения аналитических критериев устойчивости плазмы в токамаках с произвольной формой сечения магнитных поверхностей служат дифференциальное уравнение (2.9) с частотой, равной нулю, и выражение для потенциальной энергии (2.11).

Начнем рассмотрение с равновесной тороидальной конфигурации с круглыми магнитными поверхностями. Необходимые для расчетов метрические коэффициенты системы координат с прямыми силовыми линиями в квадратичном приближении по кривизне имеют вид [см. формулы (1.6), (1.9) и (1.13)]:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 + 2\xi' \cos y; \\ g_{12} &= a(a\lambda' - \xi') \sin y; \\ g_{22} &= a^2(1 + 2\lambda \cos y); \\ g_{33} &= \left(1 - ka \cos y - k\xi + \frac{1}{2} ka\lambda\right)^2; \\ \sqrt{g} &= a \left[1 + (\lambda + \xi' - ka) \cos y - k\xi - \frac{1}{2} ka\xi'\right], \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

необходимую границу устойчивости относительно баллонных мод:

$$M = B^*. \quad (2.31)$$

Очевидно, что при  $B^{*2} \ll 1$  и  $M^2 \ll 1$  выражение (2.30) переходит в (2.31). Это значит, что при малых значениях  $B^*$  и  $M$  медленную часть пробной функции можно брать постоянной с хорошей точностью.

В случае же больших значений  $B^*$  и  $M$  истинная граница в плоскости  $B^*, M$  начинает отходить от прямой  $M = B^*$ , увеличивая неустойчивую область, что хорошо видно на рис. 4. На этом рисунке область неустойчивости заштрихована: косая штриховка означает нарушение критерия Мерсье, горизонтальная штриховка указывает на нарушение критерия баллонных мод, а вертикальная штриховка отмечает область, где вы-

где  $\lambda = \xi' - ka$ , а величина  $\xi(a)$  — смещение центра сечения магнитной поверхности  $a = \text{const}$  относительно магнитной оси определяется из уравнения равновесия (1.20):

$$a\xi'' + (3 - 2S)\xi' = \alpha + \varepsilon. \quad (2.33)$$

С помощью стандартной замены избавимся от первой производной в уравнении (2.9)  $F = uG(a, y)^{-1/2}$  и приведем его к виду

$$d^2u/dy^2 - V(y)u = 0, \quad (2.34)$$

где

$$V(y) = \frac{1}{G} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{1}{4G} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \frac{4\pi\rho'_0 R^2 q^2}{Vg B_0^S} \left( \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{B_0^S} - \frac{Sy}{a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_0^S} \right) \right]. \quad (2.35)$$

Потенциал (2.35) запишем следующим образом, используя формальное разложение по кривизне, что справедливо при  $\varepsilon\beta_J \ll 1$  и  $\alpha \ll 1$ :

$$V(y) = D(t) - A(t) \cos y - E(t) \sin y, \quad (2.36)$$

где  $t = Sy$ ,

$$\begin{aligned} D &= \frac{S^2}{(1+t^2)^2} + \frac{\alpha}{1+t^2} \left( \kappa - \frac{1}{2} \alpha \frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} (\alpha - C_{12})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{C_{11}(C_{11} - 2t^2 \xi')}{(1+t^2)^2} + \frac{\alpha(t^2 \xi' - C_{11})}{(1+t^2)^2} - \frac{S\alpha(t^2 \xi' + C_{11})}{(1+t^2)^2}; \\ E &= t \left[ \frac{\alpha - C_{12}}{1+t^2} + \frac{2S\xi'}{1+t^2} + \frac{2S(\xi' + C_{11})}{(1+t^2)^2} \right]; \\ A &= \frac{\alpha - C_{11}}{1+t^2} + \frac{2SC_{12}}{(1+t^2)^2}; \quad C_{11} = \xi' + \varepsilon; \end{aligned}$$

$$C_{12} = a\xi'' + \xi' + \varepsilon; \quad \kappa = \frac{1}{2} (a\xi'' + 3\xi' - \varepsilon) + \varepsilon(1 - q^{-2}).$$

Теперь воспользуемся асимптотическим вариационным методом, изложенным в § 2.2. Для этого в вариационный принцип (2.23) с потенциалом (2.36) подставим пробную функцию, полученную асимптотическим разложением по  $S$ :

$$u = 1 + A \cos y + E \sin y. \quad (2.37)$$

После интегрирования из условия  $W > 0$  получим необходимый критерий устойчивости баллонных мод [3]:

$$\frac{1}{2} S^2 + \alpha\varepsilon(1 - q^{-2}) - \frac{3}{2} \alpha \exp\left(-\frac{1}{|S|}\right) - \frac{1}{2} S\alpha^2 > 0. \quad (2.38)$$

Здесь опущены члены порядка  $S^2$  и  $\alpha^2$  по сравнению с единицей.

В этом приближении критерий Мерсье имеет следующий вид:

$$\frac{1}{4} S^2 + \alpha\varepsilon(1 - q^{-2}) > 0. \quad (2.39)$$

Для получения критерия Мерсье достаточно исследовать поведение потенциала (2.36) при  $t \rightarrow \infty$ , как это было продемонстрировано в § 2.2 на модельном потенциале. При  $q^2(r) > 1$  критерий Мерсье не дает ограничений на величину допустимого относительного градиента давления  $\alpha$ , а критерий баллонных мод ограничивает  $\alpha$  в зависимости от  $S$ . На рис. 5 изображена граница устойчивости плазмы, определяемая критерием (2.38) при различных значениях тороидальности  $\varepsilon$  и при  $q^2 \gg 1$ .

Физическая природа первых двух членов критерия баллонных мод (2.38) такая же, как и у критерия Мерсье (2.39). Первый член характеризует стабилизирующее влияние шира, затрудняющего развитие желобкового возмущения, локализованного вблизи рациональной поверхности и вытянутого вдоль силовой линии. Второй член состоит из двух слагаемых: первое — стабилизирующее —

обязано своим происхождением наличию в токамаке «геометрической» магнитной ямы, не связанной с давлением плазмы [15], второе  $\sim q^{-2}$  — дестабилизирующее, сайдемовское связано с кривизной силовых линий, имеющей в цилиндре.

Третий член критерия (2.38), пропорциональный  $\exp(-1/|S|)$ , является дестабилизирующим и описывает эффект взаимодействия возмущений, развивающихся на соседних резонансных поверхностях. Этот эффект связан с уширением собственных функций при увеличении шира. Неаналитическая зависимость от  $S$  связана с тем, что возмущения, локализованные около своих поверх-

ностей, экспоненциально спадают с расстоянием, а расстояние между резонансными поверхностями  $\Delta a = a_{m+1} - a_m \sim 1/|S|$ .

Четвертый член критерия (2.38), пропорциональный  $S\alpha^2$ , характеризует баллонный эффект, связанный с широм. Этот эффект играет существенную роль, так как обычный баллонный эффект  $\sim \alpha^2$  в рассматриваемом приближении полностью уничтожился углублением магнитной ямы за счет давления плазмы. При спадающем профиле тока ( $S > 0$ ) баллонный эффект, связанный с широм, является дестабилизирующим, так как в этом случае шаг силовых линий растет с увеличением радиуса. А это значит, что увеличивается длина желобка возмущения, расположенного на внешнем обводе тора, и баллонное выпирание будет расти при движении возмущения по радиусу.

Критерий баллонных мод является локальным, поэтому он позволяет выяснить, в каком именно месте по радиусу шнура баллонная неустойчивость начинает развиваться в первую очередь при заданном профиле давления плазмы и плотности тока. На рис. 6, 7 представле-

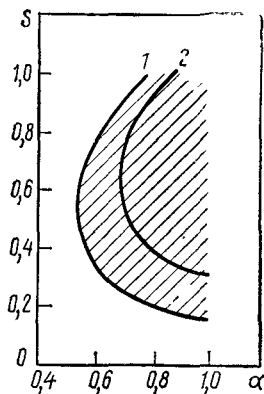


Рис. 5. Диаграмма устойчивости при  $q^2 \gg 1$  для двух значений тороидальности:

1 —  $\varepsilon = 0.1$ ; 2 —  $\varepsilon = 0.2$ . Заштрихована область неустойчивости при  $\varepsilon = 0.1$ .

ны графики зависимости критического  $\beta^* = (8\pi/B^2) (\bar{p}^2)^{1/2}$  от относительного радиуса для трех профилей давления, заданных в виде

$$p = p_0 (1 - x^2)^l, \quad (2.40)$$

где  $l$  — числовой коэффициент ( $1 \leq l \leq 2$ ),  $x = a/a_k$  — относительный радиус. Распределения плотности тока задаются профилем коэффициента запаса устойчивости:

$$q = q_0 (1 + \nu x^{2n})^m, \quad n, m = 1, 2, \quad (2.41)$$

где  $\nu = [(q_0/q_k)^{1/m} - 1]$  характеризует коэффициент запаса на границе. На рис. 6, 7 представлены результаты расчетов по критерию (2.39) для двух профилей тока. На рис. 7 профиль тока более плоский.

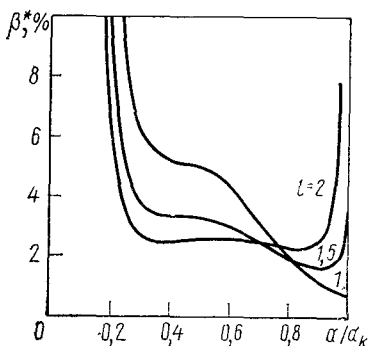


Рис. 6. Зависимость  $\beta^*$  от относительного радиуса для тороидального шнура ( $A = R/a_k = 4,6$ ) круглого сечения с заданным профилем тока ( $q_0=1$ ,  $q(a_k)=3,8$ ;  $m=1$ ,  $n=2$ ) при различных профилях давления

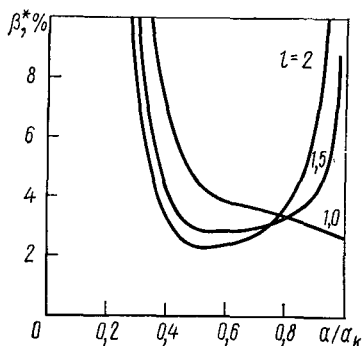


Рис. 7. То же самое, что и на рис. 6, но с другим более плоским профилем тока ( $q_0=1$ ,  $q(a_k)=1,6$ )

Эти графики показывают, при каком давлении плазмы в данной точке шнура возникает баллонная неустойчивость при заданных распределениях давления и плотности тока. Видно, что в первую очередь неустойчивость развивается на периферии шнура, приводя к достаточно жесткому ограничению на допустимое давление. Из сравнения рисунков следует, что уплощение плотности тока приводит к ослаблению ограничения на давление плазмы.

Критерий (2.38) был получен для круговых магнитных поверхностей. В то же время хорошо известно, что изменение формы сечений магнитных поверхностей существенно влияет на устойчивость плазмы [22]. В связи с этим представляет интерес аналитический критерий для токамаков с некруговыми магнитными поверхностями.

Как и в § 1.1, в качестве исходной для расчетов примем систему координат (1.2). Смещение центра  $\xi(a)$  магнитной поверхности

сти  $\psi = a^2 = \text{const}$  относительно магнитной оси и введем скругляющую систему координат  $\rho_0, \omega_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \omega &= \exp(-\eta/2) \rho_0 \cos \omega_0 + \xi(a); \\ \rho \sin \omega &= \exp(\eta/2) \rho_0 \sin \omega_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

где  $\text{th } \eta = (l_z^2 - l_h^2)/(l_z^2 + l_h^2)$ ,  $l_z, l_h$  — вертикальная и горизонтальная полуоси эллипса. В отличие от § 1.1 не будем предполагать эллиптичность магнитных поверхностей малой, кроме того, для учета треугольности магнитных поверхностей зададим их в форме:

$$\psi = \rho_0^2 + Q\varepsilon\rho_0^3\omega_0 = a^2, \quad (2.43)$$

где  $\varepsilon = \rho_0/R$  — тороидальность,  $Q$  — параметр треугольности. В нескругленной системе координат это уравнение имеет следующий вид:

$$\psi = (1 - e^2)^{-1/2} \{ (1 + e \cos 2u) \rho^2 + Q\varepsilon\rho^2 \exp(\eta/2) [(1 - e/2) \cos 3u + 3e/2 \cos u] \} = a^2, \quad (2.44)$$

где  $e = (K^2 - 1)/(K^2 + 1)$ ,  $K = l_z/l_h$ .

Расчет будем проводить разложением по кривизне. В качестве нулевого приближения возьмем эллиптический цилиндр, а треугольность учтем в первом приближении по кривизне. Из уравнения (2.43) при  $Q \ll 1$  получаем

$$\rho_0 = a - (1/2)Q\varepsilon a \cos 3\omega_0. \quad (2.45)$$

Азимутальную переменную  $\omega_0$  представим в виде разложения:

$$\omega_0 = \theta + \lambda_1 \sin \theta + \lambda_3 \sin 3\theta, \quad (2.46)$$

где параметры  $\lambda_1, \lambda_3$  находятся из условия выпрямления силовых линий.

Подставляя формулы (2.42), (2.45) и (2.46) в выражение (1.2), найдем метрические коэффициенты  $g_{ik}$  системы координат с прямыми силовыми линиями  $a, \theta$ :

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= (\text{ch } \eta - \text{sh } \eta \cos 2\omega_0) \rho_0'^2 + \rho_0^2 (\text{ch } \eta + \text{sh } \eta \cos 2\omega_0) \omega_0'^2 + \\ &+ 2\rho_0 \sin \omega_0 \text{sh } \eta \rho_0' \omega_0' + \xi'^2 + 2\xi' [\rho_0' \exp(-\eta/2) \cos \omega_0 - \\ &- \rho_0' \omega_0' \exp(\eta/2) \sin \omega_0]; \\ g_{12} &= (\text{ch } \eta - \text{sh } \eta \cos 2\omega_0) \rho_0' \dot{\rho}_0 + \rho_0^2 (\text{ch } \eta + \text{sh } \eta \cos 2\omega_0) \times \\ &\times \omega_0' \dot{\omega}_0 + \rho_0 (\rho_0' \dot{\omega}_0 + \dot{\rho}_0 \omega_0') \text{sh } \eta \sin 2\omega_0 + \xi' [\exp(-\eta/2) \times \\ &\times \cos \omega_0 \dot{\rho}_0 - \exp(\eta/2) \rho_0 \sin \omega_0 \dot{\omega}_0]; \\ g_{22} &= (\text{ch } \eta - \text{sh } \eta \cos 2\omega_0) \dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2 (\text{ch } \eta + \text{sh } \eta \cos 2\omega_0) \dot{\omega}_0^2 - \\ &- 2 \text{sh } \eta \rho_0 \sin 2\omega_0 \dot{\rho}_0 \dot{\omega}_0; \\ g_{33} &= (1 - k \exp(-\eta/2) \rho_0 \cos \omega_0 - k\xi)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

где штрих означает производную по  $a$ , а точка — производную по  $\theta$ .

Теперь задача, как и в случае круговых магнитных поверхностей, заключается в решении уравнения (2.34) с потенциалом (2.35), в котором функция  $G = g_{11}/\sqrt{g} + (g_{22}/\sqrt{g})(S^2 y^2/a^2) - (2g_{12}/\sqrt{g})(Sy/a)$  задана метрическими коэффициентами (2.47). Решая это уравнение асимптотическим вариационным методом, находим необходимый критерий устойчивости баллонных мод в токамаке с некруговым сечением [63]:

$$\frac{S^2}{2} + \alpha \varepsilon \left[ -\frac{1}{2} V_0'' B_0^2 R \sqrt{1-e^2} - \frac{1}{q^2} \right] - \frac{3}{2} \alpha K^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{|S|}\right) - \frac{\alpha^2}{4} (2Sf_1 + e^2 f_2) > 0. \quad (2.48)$$

Здесь  $V_0''$  — «геометрическая» магнитная яма:

$$\left. \begin{aligned} V_0'' &= -\frac{2}{B_0^2 R \sqrt{1-e^2}} \left[ 1 - \frac{3}{2} e \frac{1+e}{2+e} + 6eQ \frac{1-e}{2+e} \right]; \\ f_1 &= 4K^{3/2} \frac{3+K^2}{(1+K^2)(1+3K^2)}, \quad f_2 = \frac{1}{K^2(1+3K^2)} \left( \frac{1+K^2}{1+K} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Критерий (2.48) отличается от критерия (2.38) видом геометрической магнитной ямы. Из формулы (2.49) видно, что в отсутствие эллиптичности ( $e = 0$ ) треугольность  $Q$  не меняет глубины магнитной ямы. Эллиптичность же даже в отсутствие треугольности существенно изменяет магнитную яму. Наибольший практический интерес, по-видимому, представляет случай совместного действия эллиптичности и треугольности ( $D$ -образная форма).

Эллиптичность, кроме того, сильно изменяет (уменьшает при вытягивании шнура вдоль оси симметрии тора) эффект взаимодействия соседних возмущений, а также баллонный эффект, пропорциональный шире (функция  $f_1$ ). В критерии (2.49) появился еще один дестабилизирующий член, пропорциональный квадрату эллиптичности. Этот член представляет собой разность обычного баллонного эффекта, пропорционального  $\alpha^2$ , и углубления магнитной ямы за счет конечного давления плазмы.

На рис. 8 представлены зависимости допустимого давления плазмы, рассчитанного с помощью критерия (2.48) для токамака с  $D$ -образной формой магнитных поверхностей. Параметр треугольности фиксирован ( $Q = 1,25$ ), а эллиптичность  $e$  изменяется от нуля до  $3/5$  (отношение полуосей  $1 \leq K < 2$ ). Профиль давления задан формулой (2.40) с  $l = 2$ , а профиль тока — формулой (2.41) (кривые 1 и 2 соответствуют разным профилям тока при фиксированных  $q_0$  и  $q_a$ ). В качестве наглядного примера для сравнения точками представлены результаты численного расчета баллонных мод из работы [64].

Подробный анализ численных расчетов баллонных мод проведем в следующем параграфе.

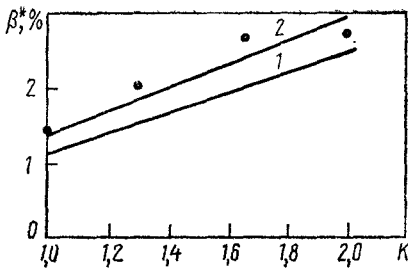


Рис. 8. Зависимость  $\beta^*$  от эллиптичности  $K$  при треугольности  $Q=1,25$ , заданных профилях давления ( $l=2$ ) и тока:

1 —  $q_0 = 1$ ,  $q(a_k) = 3,8$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; 2 —  $q_0 = 1$ ,  $q(a_k) = 3,8$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$

Точки — результат численного расчета из работы [64]

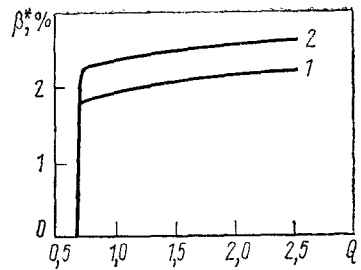


Рис. 9. Зависимость  $\beta^*$  от треугольности  $Q$  при  $K=1,65$  для тех же профилей тока и давления, что и на рис. 8

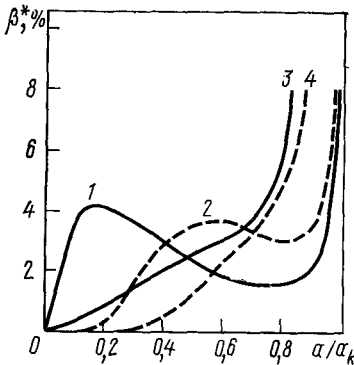


Рис. 10. Зависимость  $\beta^*$  от относительного радиуса для шнура эллиптического сечения ( $K=1,5$ ,  $Q=0$ ) при заданном профиле давления ( $l=2$ ) для различных профилей тока:

1 —  $q_0 = 1$ ,  $q(a_k) = 3,8$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ;  
 2 —  $q_0 = 1$ ,  $q(a_k) = 3,8$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ ;  
 3 —  $q_0 = 1$ ,  $q(a_k) = 1,6$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ;  
 4 —  $q_0 = 1$ ,  $q(a_k) = 1,6$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$

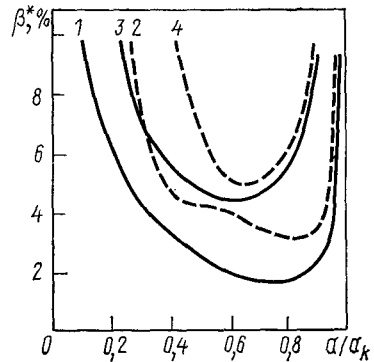


Рис. 11. Зависимость  $\beta^*$  от относительного радиуса для шнура  $D$ -образного сечения ( $K=1,5$ ,  $Q=1$ ) при тех же профилях тока и давления, что и на рис. 10

На рис. 9 представлены зависимости допустимого давления плазмы от величины параметра треугольности при фиксированной эллиптичности  $K = 1,65$ . Видно, что при малой треугольности баллонные моды могут сильно ограничивать допустимое давление вытянутого вдоль оси симметрии тора сечения шнура. Нарушение критерия устойчивости происходит вблизи магнитной оси, что следует из рис. 10,



на котором показано для различных профилей тока, при каком значении величины  $\beta^*$  возникает неустойчивость в данной точке шнура. Из этого рисунка следует, что уплощение профиля тока в центре приводит к расширению области неустойчивости. Возникновение неустойчивости в центральной части шнура обусловлено уменьшением геометрической магнитной ямы за счет эллиптичности. Это уменьшение можно компенсировать увеличением коэффициента запаса устойчивости на магнитной оси  $q_0$  или созданием  $D$ -образной формы сечения. При выполнении условия:

$$1 - \frac{1}{q_0^2} + 3 \frac{(K^2 - 1)(4Q - K^2)}{(K^2 + 1)(3K^2 + 1)} > 0 \quad (2.50)$$

неустойчивость в центральной части шнура исчезает (рис. 11). Теперь ограничение на критическое давление накладывает периферийная область плазмы.

В этом случае устойчивость существенно зависит от профиля давления. На рис. 12 показано, что наиболее неблагоприятным является

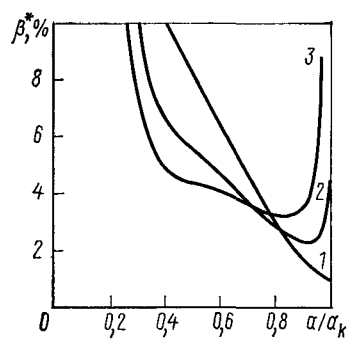


Рис. 12. Зависимость  $\beta^*$  от  $a/a_k$  для шнура  $D$ -образного сечения ( $K=1,5$ ,  $Q=1$ ) при тех же профилях давления и тока, что и на рис. 6

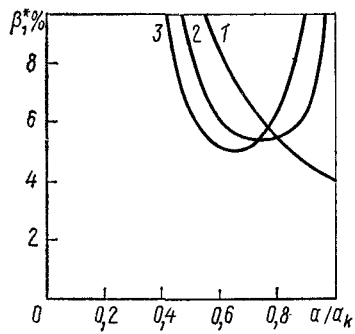


Рис. 13. Зависимость  $\beta^*$  от  $a/a_k$  для шнура  $D$ -образного сечения ( $K=1,5$ ,  $Q=1$ ) при тех же профилях давления и тока, что и на рис. 7

параболическое распределение давления ( $l = 1$ ), так как оно имеет наибольший градиент давления на границе шнура. Увеличение показателя  $l$  в выражении для профиля давления (2.40) приводит к улучшению устойчивости на периферии и к ухудшению устойчивости в средней части шнура, что является следствием уменьшения и увеличения соответственно градиента давления в этих областях. Минимальное значение  $\beta^*$  по всей области плазмы может увеличиваться или уменьшаться с ростом показателя  $l$  в зависимости от профиля тока. Из сравнения рис. 12 и 13 видно, что уплощение профиля тока, как и в случае круговых поверхностей, существенно повышает допустимое давление плазмы с точки зрения баллонных мод.

## § 2.4. Численные расчеты баллонных мод

Аналитическое исследование баллонных мод, проведенное в § 2.3, позволило понять физическую природу возникающего ограничения на допустимое давление плазмы и указывает на имеющиеся возможности ослабления этого ограничения. При этом исследовании использовалось формальное разложение по кривизне системы, а так как фактическим малым параметром в задаче является произведение  $\epsilon\beta_J \sim \alpha$ , то проведенное рассмотрение справедливо при относительно малом давлении. Кроме того, аналитические методы позволяют исследовать устойчивость асимптотически точно лишь при  $nq \rightarrow \infty$ , т. е. моды с малыми азимутальными числами ( $m \approx nq$ ) аналитически не исследованы. Численные методы дают возможность провести расчеты баллонных мод без указанных выше приближений.

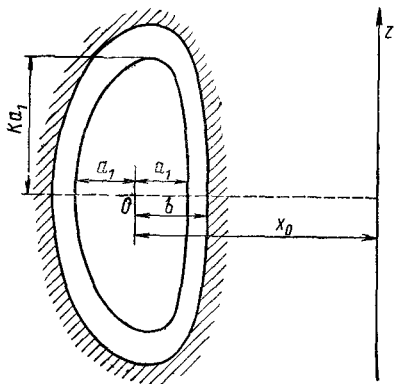


Рис. 14. Геометрия модели, используемой в численных расчетах:  $a_1$  характеризует размер плазмы,  $b$  — размер идеального проводящего кожуха

В настоящем параграфе в основном будем исходить из работ Принстонской группы, которая впервые обнаружила баллонные моды [29] и внесла большой вклад в их изучение [64]. В этих работах использовался численный код PEST [65]. Вначале рассчитывалось равновесие с выбранными параметрами, которое порождало серию равновесий при условии сохранения потоков [66] с той же самой формой границы плазмы, профиля давления и профиля коэффициента запаса устойчивости, но с увеличивающимся значением  $\beta^*$ . А затем исследовалась устойчивость этой серии равновесий.

Форма границы плазмы (рис. 14) задавалась следующим образом:

$$x = x_0 + a_1 \cos(\theta + \delta \sin \theta); \quad z = Ka_1 \sin \theta, \quad (2.51)$$

где  $x$  возрастает наружу от оси симметрии тора, а  $z$  — вдоль оси,  $x_0$  — положение центра граничной поверхности;  $a_1$  — малый радиус шнура;  $b$  — малый радиус идеально проводящего кожуха;  $K$  — параметр эллиптичности,  $\delta$  — параметр треугольности. [Для сопоставления формы границы, задаваемой соотношениями (2.51), с формой, определяемой аналитическим выражением (2.43), имеем следующие связи между параметрами:  $a_1^2 = \exp(-\eta)a^2$ ,  $K = \exp \eta$ ,  $\delta \approx (3/2) \times \exp(-\eta/2)a_1 Q/R$ .]

Распределение давления плазмы и плотности тока по сечению шнура брались аналогично (2.40) и (2.41). Влияние распределения тока на устойчивость изучалось при фиксированном коэффициенте запаса на магнитной оси  $q_0$  и изменяющемся  $q$  на границе ( $q_a$ ) или при фиксированном  $q_a$  и изменяющемся  $q_0$ .

Низкие моды  $n = 1$  и  $n = 2$  при наличии свободной границы возбуждаются в основном за счет энергии магнитного поля продольного тока и служат проявлением винтовой неустойчивости. Влияние баллонных эффектов на винтовую неустойчивость будет рассмотрено в следующей главе. Моде  $n = 3$  уделим большее внимание. Так как  $n = 3$  достаточно велико, чтобы мода в основном была связана с баллонным эффектом даже при свободной границе, и в то же время это  $n$  достаточно мало, что удобно для проведения численных расчетов.

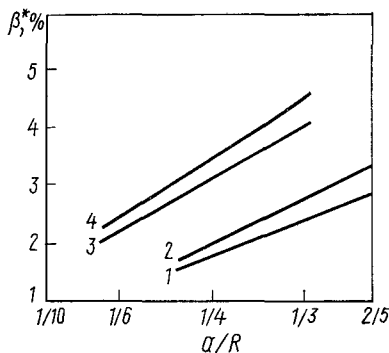


Рис. 15. Критическое  $\beta^*$  как функция тороидальности для круглого сечения:

1 — мода  $n = 3$  со свободной границей; 2 — мода  $n = 3_w$  с закрепленной границей, и для  $D$ -образного сечения ( $K = 1,65$ ,  $\delta = 0,25$ ); 3 —  $n = 3$ ; 4 —  $n = 3_w$

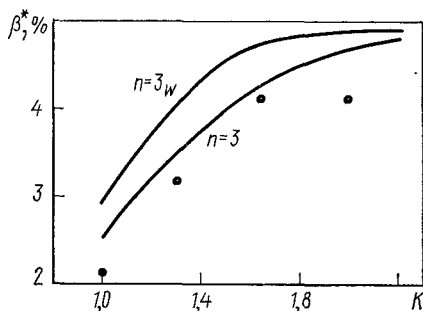


Рис. 16. Критическое  $\beta^*$  как функция эллиптичности для конфигурации с  $A = 3$ ,  $\delta = 0,25$ ,  $l = 2$  и  $1 < q < 3,8$ . Точками представлен результат расчета баллонных мод при  $n \rightarrow \infty$

Сложная взаимосвязь равновесных плазменных параметров даже при умеренных  $\beta^*$  и их сильное влияние на устойчивость делают общий анализ достаточно трудным. В связи с этим все расчеты проводились при изменении только одного параметра, а остальные были фиксированы.

Зависимость критического  $\beta^*$  от тороидальности оказалась, как видно из рис. 15, линейной как для случая круговых, так и некруговых магнитных поверхностей. В обоих случаях расчеты проводились для профиля давления с показателем  $l = 2$  и для коэффициента запаса устойчивости, изменяющегося от 1 на магнитной оси до 3, 8 на границе плазмы. В случае  $D$ -образных поверхностей параметр эллиптичности  $K = 1,65$ , параметр треугольности  $\delta = 0,25$ . Устойчивость рассчитывалась по отношению к моде  $n = 3$  как при закрепленной границе, так и при свободной границе плазмы. Видно, что наличие свободной границы плазмы для этой моды лишь несколько понижает критическое  $\beta^*$  по сравнению с закрепленной границей.

На рис. 16 представлены зависимости критического  $\beta^*$  от эллиптичности. Расчеты проводились для  $D$ -образной формы, обеспечивающей устойчивость с точки зрения критерия Мерсье ( $\delta = 0,25$ ). Критическое  $\beta^*$  повышается при увеличении вытянутости вдоль оси симметрии

при тора  $K > 1$  для моды  $n = 3$  как при свободной, так и при фиксированной границе, а также и для баллонных мод желобковой неустойчивости при  $n \rightarrow \infty$ . Видно, что при  $K \simeq 1,7$  рост критического  $\beta^*$  замедляется и дальнейшее увеличение эллиптичности не эффективно. Аналитическое исследование баллонных мод с помощью критерия (2.48) не указывает на насыщение критического  $\beta^*$  при увеличении эллиптичности (см. рис. 8), хотя имеется хорошее согласие при относительно малых  $\beta^*$ . Это различие связано с отмеченной выше ограниченностью области применимости аналитических расчетов. Треугольность, как это следует из выражения для магнитной ямы (2.49), может влиять

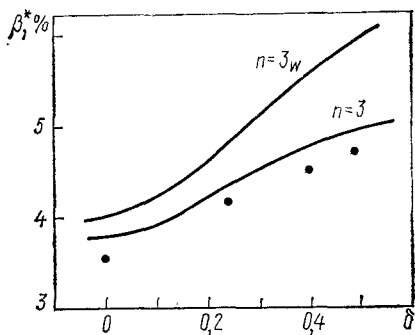


Рис. 17. Критическое  $\beta^*$  как функция треугольности для конфигурации с  $A=3$ ,  $K=1,65$ ,  $l=2$  и  $1 < q < 3,8$

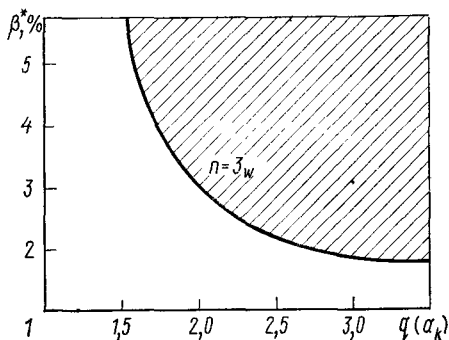


Рис. 18. Критическое  $\beta^*$  как функция от  $q$  ( $a_k$ ) при  $q_0=1$  для конфигурации  $A=4,6$ ;  $K=1,0$ ;  $\delta=0$ ;  $l=2$

на устойчивость лишь при наличии эллиптичности, поэтому расчеты зависимостей  $\beta^*$  от  $\delta$  проводились при  $K = 1,65$ . На рис. 17 приведены результаты для моды  $n = 3$  и для мелкомасштабных баллонных мод. Видно, что малая треугольность не эффективна и только  $\delta \simeq 0,5$  ( $D$ -образная форма) дает существенное улучшение устойчивости по отношению к чистому эллипсу.

Выше проведен анализ влияния на устойчивость плазмы в токамаке чисто геометрических факторов: аспектового отношения  $A$ , эллиптичности  $K$  и треугольности  $\delta$ . Из этого анализа следует, что за счет увеличения аспектового отношения  $\beta^*$  растет пропорционально  $A$ , чисто эллиптическая форма позволяет приблизительно в два раза увеличить  $\beta^*$  по сравнению с кругом, а  $D$ -образная форма допускает  $\beta^*$ , приблизительно в 1,3 раза больше, чем чистый эллипс.

Теперь перейдем к рассмотрению влияния профиля коэффициента запаса устойчивости на величину критического  $\beta^*$ . Результат расчета устойчивости относительно моды  $n = 3$  круглого плазменного шнура с  $A = 4,6$  при  $l = 1,4$  и фиксированном значении  $q_0 = 1$  в зависимости от  $q_a$  изображен на рис. 18. При увеличении  $q_a$  критическое  $\beta^*$  спадает, что находится в согласии с аналитическим критерием (2.48), так как в этом случае растет дестабилизирующее влияние баллонного эффекта, связанного с широм (член, пропорциональный  $S\alpha^2$ ), за счет

увеличения шира. При  $q_a \rightarrow 1$  шир стремится к нулю и ограничение по  $\beta^*$  исчезает в соответствии с диаграммой устойчивости на рис. 5.

Аналогичные расчеты для круглого шнура при  $l = 2$  и фиксированном значении  $q_a = 3,8$  в зависимости от  $q_0$  для моды  $n = 3$ , а также и для баллонных мод ( $n \rightarrow \infty$ ) представлены на рис. 19. Резкое увеличение критического  $\beta^*$  для мелкомасштабных баллонных мод ( $n \rightarrow \infty$ ) при  $q_0 > 2,2$  связано с уменьшением шира и соответствует на диаграмме устойчивости рис. 5 области малых  $S$  и больших  $\alpha$ .

Хорошее согласие между первыми численными расчетами [29, 30, 64] и аналитическими критериями (2.38) и (2.48) связано с малой вели-

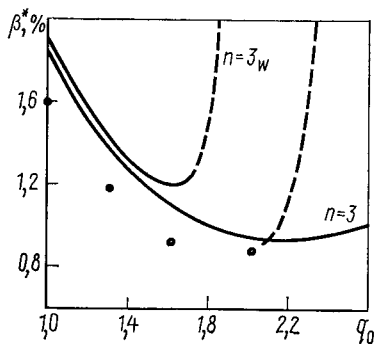


Рис. 19. Критическое  $\beta^*$  как функция от  $q_0$  при  $q(a_k) = 3,8$  для той же конфигурации, что на рис. 18. Точками представлен результат для баллонных мод при  $n \rightarrow \infty$

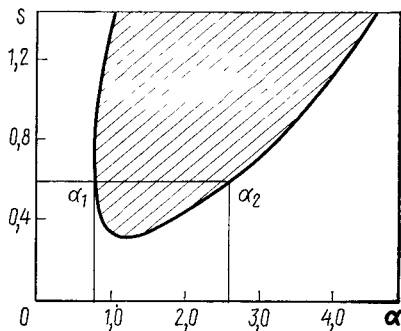


Рис. 20. Диаграмма устойчивости  $D$ -образного шнура. Область неустойчивости заштрихована

чиной критического градиента давления, при котором начинают развиваться баллонные моды ( $\alpha < 1$ ). Позднее было показано, что при увеличении давления баллонные моды подавляются и возникает вторая зона устойчивости [12, 36, 38]. На рис. 20 из работы [12] область неустойчивости баллонных мод заштрихована; видно, что при шире  $\sim 0,6$  неустойчивость существует при градиенте давления, лежащем в интервале  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ . Для аналитического описания второй зоны устойчивости необходимо учитывать члены порядка  $\alpha^4$  и  $S^2\alpha^2$ , которые были опущены при выводе критериев (2.38) и (2.48)\*. Вопрос о доступности второй зоны устойчивости обсуждается в ряде работ [73, 74] и может иметь практический интерес.

\* Недавние аналитические исследования устойчивости при большом  $\beta$  [80, 81] позволяют, при использовании техники расчетов, развитой в [13 и 81], получить критерий

$$S^2/2 + \alpha \varepsilon (1 - q^{-2}) - (3/2)\alpha \exp(-1/|S|) - S\alpha^2/2 + (7/128)\alpha^4 > 0,$$
 описывающей обе зоны устойчивости. Как видно из критерия, наличие второй зоны устойчивости связано с эффектом стабилизации плазмы при большом давлении.

В большинстве работ рассматривалась устойчивость плазмы со скалярным давлением. Успехи дополнительных методов нагрева ставят вопросы об устойчивости плазмы с анизотропным давлением. В работе [75] моделировалась анизотропия давления, возникающая при перпендикулярной инжекции нейтралов. Результат расчета устойчивости представлен на рис. 21, из которого следует, что этот способ нагрева облегчит доступ ко второй зоне устойчивости. Кривая 1 соответствует скалярному давлению, а 2, смещенная в область большего давления и большего шира, соответствует анизотропному давлению.

Аналитический критерий (2.48) и анализ численных расчетов, проведенный выше, связаны с исследованием границы устойчивости плазмы, когда частота возбуждаемых колебаний  $\omega^2 = 0$ . Зависимости инкремента колебаний  $\gamma^2 = -\omega^2$  от различных параметров также представляют интерес, так как характеризуют «степень» неустойчивости, т. е. поведение плазмы за порогом устойчивости. На рис. 22 из работы

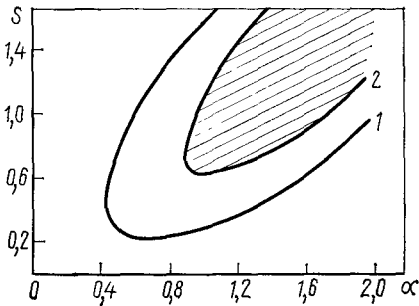


Рис. 21. Диаграмма устойчивости круглого шнура:

1 — соответствует скалярному давлению плазмы; 2 — ограничивает заштрихованную область неустойчивости при анизотропном давлении

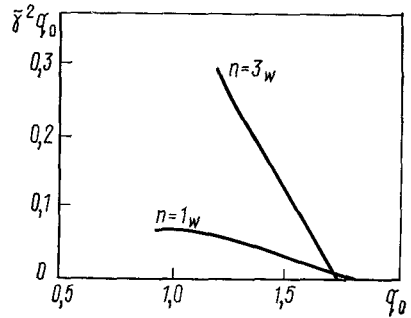


Рис. 22. Зависимость параметра  $\tilde{\gamma}^2 q_0$  ( $\tilde{\gamma}^2 = \gamma^2 a_k^2 / C_k^2$ ) от  $q_0$  при  $q(a_k^2) = 3$  для  $D$ -образного шнура при  $\beta^* = 8\%$

[67] представлена зависимость нормированного инкремента от  $q_0$  при фиксированном значении  $q_a = 3,3$  и  $\beta^* = 8\%$ . Видно, что при  $q_0 > 1,73$  плазма становится устойчивой для моды  $n = 3$  при закрепленной границе. Из рис. 19 и 22 следует, что уплощение профиля за счет увеличения  $q_0$  позволяет существенно увеличить критическое  $\beta^*$ .

До сих пор свободная граница плазмы рассматривалась лишь при бесконечно удаленном кожухе ( $b/a = \infty$ ), теперь начнем приближать кожух к границе плазмы. Ясно, что при этом инкремент рассматриваемой моды станет уменьшаться и, когда кожух совпадает с границей плазмы, станет равным инкременту внутренней моды с закрепленной границей. Это приближение кожуха проиллюстрировано на рис. 23, где представлены зависимости нормированного инкремента от  $\beta^*$  для моды  $n = 3$  в  $D$ -образном токамаке при различных значениях отношения  $b/a$ . Видно, что для заметного эффекта кожух должен быть расположен близко к границе плазмы.

Интересный результат представлен на рис. 24, где изображены зависимости критического  $\beta^*$  от величины, обратной номеру моды  $1/n$  как для случая свободной границы ( $b/a = \infty$ ), так и для закрепленной границы. Расчеты проведены для токамака с  $D$ -образной формой при  $A = 3,5$ ,  $l = 1,4$  и  $1 < q < 3$ . Из рисунка видно, что при закрепленной границе плазмы первые моды не опасны и ограничение по  $\beta^*$  дают высшие моды, причем устойчивость плазмы относительно высоких мод уже не зависит от наличия границы плазмы. Этот результат понятен; так, колебания с высокими номерами мод являются мелкомасштабными. При свободной границе плазмы ограничение по  $\beta^*$  может наступать из-за низких мод, и здесь результат существенным образом зави-

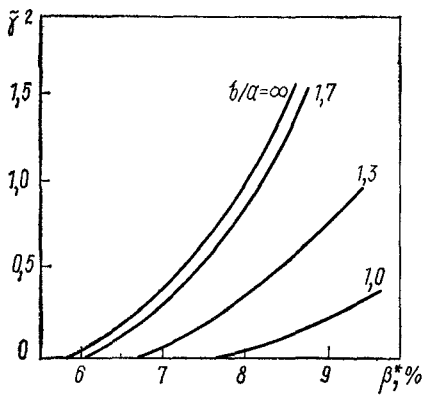


Рис. 23. Зависимость нормированного инкремента  $\tilde{\gamma}^2$  от  $\beta^*$  при различных положениях кожуха  $b/a = \infty$ ; 1,7; 1,3; 1,0 для конфигурации с  $A=3,5$ ,  $K=1,65$ ,  $\delta=0,25$ ,  $l=1,4$   $1 < q < 3$  относительно моды  $n=3$

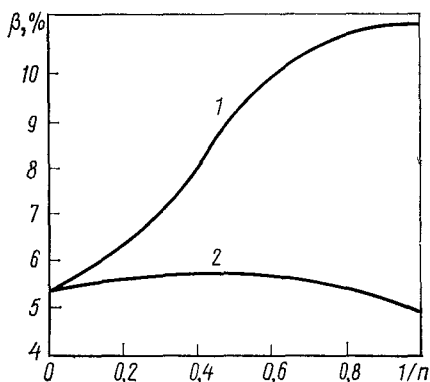


Рис. 24. Критическое  $\beta^*$  как функция от  $1/n$  для конфигурации с  $A=3,5$ ;  $K=1,65$ ;  $\delta=0,25$ ;  $l=1,4$  и  $1 < q < 3$   
1 — соответствует закрепленной границе  $b/a=1$ ; 2 — свободной границе плазмы  $b/a = \infty$

сит от профиля  $q$  и коэффициента запаса  $q_0$ . Для того чтобы понять причину ограничения по давлению плазмы в этом случае, необходимо разобраться во влиянии баллонного эффекта на винтовую неустойчивость, что и будет сделано в следующей главе обзора.

## ГЛАВА 3

### БАЛЛОННЫЕ МОДЫ ВИНТОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

#### § 3.1. Теория винтовой неустойчивости тороидального шнура

Для выяснения роли баллонных эффектов в развитии винтовой неустойчивости в токамаке рассмотрим простую модель распределения плотности тока по сечению шнура, позволяющую решить задачу аналитически. Будем считать, что плотность тока по сечению шнура постоянна, а тороидальный шнур круглого сечения радиуса  $a_k$  помещен

в кожух радиуса  $b$ . Вначале предположим, что  $b/a \rightarrow \infty$ , и пренебрежем влиянием кожуха на устойчивость, а затем рассмотрим, к каким эффектам приведет его учет.

Задачу удобнее всего решать в вариационной постановке, используя теорию возмущений, где малым параметром будет кривизна тора  $\varepsilon = a_h/R$ . Хорошо известно, что для вычисления поправки первого порядка в энергии собственные функции необходимо знать лишь в нулевом приближении, т. е. необходимо знать собственные функции цилиндрического плазменного шнура. Уравнение, описывающее спектр колебаний цилиндрического плазменного шнура, было получено в гл. 1, для однородного шнура оно принимает следующий вид:

$$\left( \frac{\omega^2}{c_A^2} + \hat{k}_{\parallel}^2 \right) \Delta_{\perp} \Phi = \frac{i \hat{k}_{\parallel}}{a B_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{4\pi}{c} \frac{dj_0}{da}. \quad (3.1)$$

Правая часть этого уравнения равна нулю как внутри плазменного шнура ( $dj_0/da = 0$ ), так и снаружи в вакууме ( $j_0 = 0$ ). Поэтому и в плазме, и в вакууме собственные функции удовлетворяют уравнению

$$\Delta_{\perp} \Phi = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) служит для получения граничного условия при  $a = a_h$ .

Рассмотрим цилиндрический плазменный шнур с отождествленными торцами длиной  $L = 2\pi R$ , где  $R$  — большой радиус эквивалентного тора. Возмущенный потенциал  $\Phi$  возьмем в форме

$$\Phi = \varphi(a) \exp(im\theta - i(r/R)z) \quad (3.3)$$

так как из-за цилиндрической симметрии гармоники по  $\theta$  независимы.

Решение уравнения (3.2) внутри шнура запишем в виде

$$\varphi^i = (a/a_h)^m, \quad (3.4)$$

тогда, используя условие непрерывности потенциала при  $a = a_h$ , для вакуума получаем

$$\varphi^e = (a/a_h)^{-m}. \quad (3.5)$$

Интегрируя уравнение (3.1) по бесконечно тонкому слою на границе плазмы и вакуума, находим:

$$\left( k_m^2 + \frac{\gamma^2}{c_A^2} \right) \frac{d\varphi^i}{da} - k_m^2 \frac{d\varphi^e}{da} = \frac{m(4\pi/c) j_0}{a B_0} k_m \varphi^i, \quad (3.6)$$

где  $k_m = \frac{1}{qR} (m - nq)$ . Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.6), приходим к дисперсионному уравнению [68]:

$$\tilde{\gamma}^2 - 2(m - nq) + 2(m - nq)^2 = 0, \quad (3.7)$$

где  $\tilde{\gamma}^2 = \gamma^2 a^2 / c_0^2$ ;  $c_0^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0$ .

В выражении (3.7) второе слагаемое при  $nq < m$  играет дестабилизирующую роль, оно связано с продольным током в токамаке и является источником винтовой неустойчивости. Третье слагаемое отража-



ет стабилизирующее влияние возмущенного магнитного поля, как будет видно дальше, при приближении кожуха к границе плазмы это слагаемое увеличивается. Выражение (3.7) описывает спектр колебаний цилиндрического плазменного шнура при кожухе, удаленном на бесконечность.

Этот спектр колебаний изображен на рис. 25, колебания неустойчивы в области  $\tilde{\gamma}^2 > 0$  и устойчивы при  $\tilde{\gamma}^2 < 0$ . Видно, что на границе устойчивости при  $\tilde{\gamma}^2 = 0$  происходит пересечение различных ветвей колебаний. Например, при  $nq = 2$  пересекаются ветви мод с  $m = 2$  и  $m = 3$ , т. е. спектр вырожден.

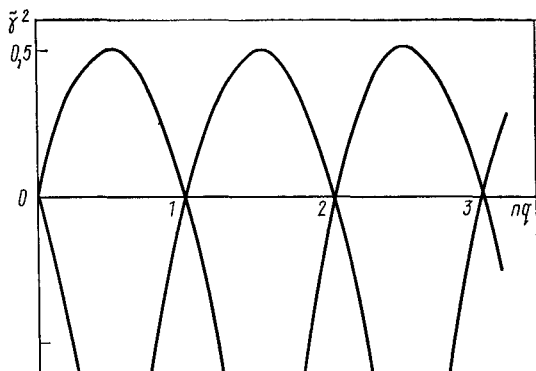


Рис. 25. Спектр колебаний цилиндрического шнура с однородным током без кожуха

Хорошо известно из квантовой механики и радиофизики, что малые возмущения, действующие на систему, снимают вырождение и в первую очередь проявляются около точек пересечения ветвей. Роль такого возмущения в рассматриваемой задаче играет тороидальная кривизна. Ниже будет показано, что при учете тороидальности пересечения ветвей соседних мод колебаний  $m$ -й и  $(m + 1)$ -й расщепятся, как это происходит в зонной структуре электронного спектра твердых тел, и спектр колебаний примет вид, изображенный на рис. 26. В спектре колебаний возникнут области, где невозможно распространение колебаний, а инкремент ( $\tilde{\gamma}^2 > 0$ ) в неустойчивой области в среднем возрастет.

В самом деле, уравнение, описывающее винтовую неустойчивость в торе (1.37), схематически можно записать в виде:

$$(\tilde{\gamma}^2 + \hat{L}_0)\Phi(a, \theta) - 2\varepsilon\beta_J \cos \theta \Phi(a, \theta) = 0. \quad (3.8)$$

Здесь оператор  $(\tilde{\gamma}^2 + \hat{L}_0)\Phi(a, \theta) = 0$  характеризует винтовую неустойчивость в цилиндре, а член, пропорциональный  $\varepsilon\beta_J$  (баллонный эффект), возник от «изгибания» цилиндра в тор.

Рассмотрим точку пересечения  $m$ -й и  $(m + 1)$ -й ветвей на рис. 25. Очевидно, что здесь мы имеем задачу о двукратно вырожденном уров-

не, решение которой хорошо известно. Правильная собственная функция имеет вид:

$$\Phi(a, \theta) = C_m \chi_m + C_{m+1} \chi_{m+1}, \quad (3.9)$$

где  $\chi_m = \varphi_m^0(a) \cos m\theta$ ,  $\varphi_m^0(a)$  — собственная функция цилиндрической задачи. Умножим уравнения (3.8) на  $\chi_m$  и проинтегрируем по  $a$  и  $\theta$ :

$$\Delta \tilde{\gamma}^2 \langle \varphi_m^{02} \rangle C_m = \varepsilon \beta_J \langle \varphi_m^0 \varphi_{m+1}^0 \rangle C_{m+1}. \quad (3.10)$$

Здесь введена разность  $\Delta \tilde{\gamma}^2 = \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\gamma}_0^2$ , где  $\tilde{\gamma}_0^2$  — значение инкремента для цилиндра. Величина  $\Delta \tilde{\gamma}^2$  характеризует влияние баллонного эффекта. Скобки обозначают интегрирование по радиусу.

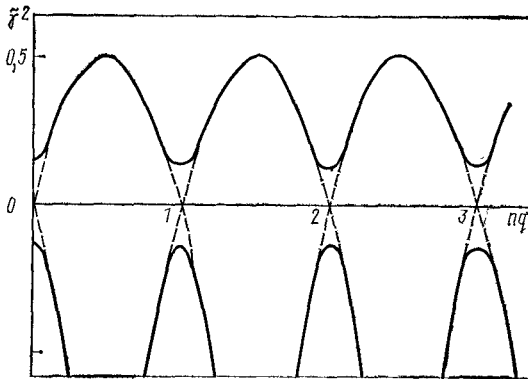


Рис. 26. Спектр колебаний тороидального шнура с однородным током без кожуха

Аналогично, умножая уравнение (3.8) на  $\chi_{m+1}$  и интегрируя, найдем

$$\Delta \tilde{\gamma}^2 \langle \varphi_{m+1}^{02} \rangle C_{m+1} = \varepsilon \beta_J \langle \varphi_m^0 \varphi_{m+1}^0 \rangle C_m. \quad (3.11)$$

При получении (3.11) учтено, что оператор  $\hat{L}_0$ , действуя на функцию  $\chi_{m+1}$  в точке пересечения, дает то же самое значение инкремента  $\tilde{\gamma}_0^2$ , что и при действии на  $\chi_m$ . Из уравнения (3.10) и (3.11) следует:

$$\Delta \tilde{\gamma}^2 = \pm \varepsilon \beta_J \frac{\langle \varphi_m^0 \varphi_{m+1}^0 \rangle}{\sqrt{\langle \varphi_m^{02} \rangle \langle \varphi_{m+1}^{02} \rangle}}, \quad (3.12)$$

Эта величина расщепления вырожденного уровня  $\tilde{\gamma}_0^2 = 0$ , вызванная «изгибанием» цилиндра в тор. Выражение (3.12) характеризует максимальное расщепление в самой точке пересечения ветвей. При отходе от этой точки  $\Delta \tilde{\gamma}^2 \rightarrow 0$  (см. рис. 26), точнее говоря, становится порядка  $\varepsilon^2 \beta_J^2 \ll 1$ , но члены такого порядка были опущены.

Из выражения (3.12) видно, что баллонный эффект винтовых мод колебаний при свободной границе является величиной первого порядка по малому параметру  $\varepsilon \beta_J$ , и поэтому он может быть гораздо опаснее

баллонного эффекта мелкомасштабных мод колебаний, пропорционального  $\varepsilon^2 \beta_z^2$  и рассмотренного в § 2.4.

Для количественного расчета баллонных мод винтовой неустойчивости при наличии кожуха воспользуемся энергетическим принципом  $\delta \int (T - W) dt = 0$  с упрощенными выражениями для потенциальной и кинетической энергий (1.60) и (1.61). Запишем эти выражения, сохранив только члены, необходимые для расчета инкрементов винтовой неустойчивости:

$$W = \frac{1}{2} \int adad\theta dS \left\{ \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{k}_{\parallel} \Phi \right)^2 + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial a} \hat{k}_{\parallel} \Phi \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{aB_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{d\rho_0}{da} \frac{1}{a} \frac{D(\Phi, 1/B_0^S)}{D(a, \theta)} + \frac{j_0^S}{caB_0^S} \frac{D(\Phi, \hat{k}_{\parallel} \Phi)}{D(a, \theta)} \right\}. \quad (3.13)$$

$$T = \frac{1}{2} \int adad\theta dS \left\{ \left( \frac{\rho_0}{aB_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\rho_0}{B_0} \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)^2 \right\}. \quad (3.14)$$

Входящие в (3.13) контравариантные компоненты полей и тока в необходимом приближении имеют следующий вид [см. (1.15), (1.17)]:

$$B_0^S = B_0/g_{33}, \quad B_0^\theta = B_J/\sqrt{g}, \quad j_0^S = \mathcal{Y}'/2\pi a. \quad (3.15)$$

Здесь используется система координат с прямыми силовыми линиями, где отношение контравариантных компонент  $B_0^\theta/B_0^S = 1/qR$  не зависит от угловой переменной  $\theta$ . Это означает, что оператор  $k_{\parallel}$  при действии на отдельную гармонику дает константу, что упрощает расчеты.

В качестве пробной функции в энергетический принцип подставим действительную комбинацию соседних собственных функций цилиндра:

$$\Phi = C_m \Phi_m^0 \exp(im\theta) + C_{m+1} \Phi_{m+1} \exp[i(m+1)\theta] + \text{к. с.}, \quad (3.16)$$

где  $\Phi_m^0 \sim a^m$  внутри шнура и  $(a^{-m} - a^m/b^{2m})$  между плазмой и кожухом.

После интегрирования по переменным  $a, \theta, S$ , получается функционал, зависящий от четырех параметров  $C_m, C_m^*, C_{m+1}$  и  $C_{m+1}^*$ . Варирование этого функционала по  $C_m^*$  и  $C_{m+1}^*$  дает следующую систему уравнений для определения  $C_m$  и  $C_{m+1}$ :

$$\left. \begin{aligned} \left[ \tilde{\gamma}^2 - 2x_m + \frac{2x_m^2}{1 - (a/b)^{2m}} \right] C_m + \varepsilon (\beta_J + 1) C_{m+1} &= 0; \\ \left[ \tilde{\gamma}^2 - 2x_{m+1} + \frac{2x_{m+1}^2}{(1 - (a/b)^{2m+2})} \right] C_{m+1} + \varepsilon (\beta_J + 1) \frac{m}{m+1} C_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где  $x_m = m - nq$ .

Условием разрешимости этой системы уравнений является следующее дисперсионное уравнение:

$$\left| \begin{array}{cc} \tilde{\gamma}^2 - 2x_m + \frac{2x_m^2}{1-(a/b)^{2m}} & \varepsilon(\beta_J + 1) \\ \varepsilon(\beta_J + 1) \frac{m}{m+1} & \tilde{\gamma}^2 - 2x_{m+1} + \frac{2x_{m+1}^2}{1-(a/b)^{2m}} \end{array} \right| = 0. \quad (3.18)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  оно распадается на два независимых уравнения для  $m$ -й и  $(m+1)$ -й мод, которые отличаются от уравнения (3.7) наличием знаменателей в стабилизирующих членах. Эти знаменатели возникли при учете кожуха; стабилизирующее влияние кожуха в недиагональных членах в рассматриваемом приближении несущественно. Очевидно,

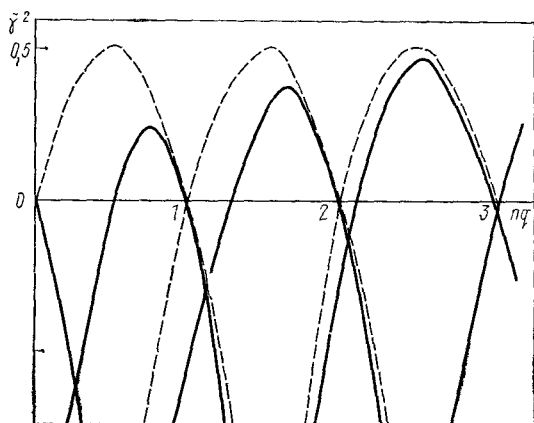


Рис. 27. Спектр колебаний цилиндрического шнура с однородным током при наличии кожуха

но, что при приближении кожуха к границе плазмы ( $b \rightarrow a_k$ ) винтовая неустойчивость подавляется. В этом случае на диаграмме устойчивости появляются интервалы по  $nq$  (рис. 27), где колебания не раскачиваются ( $\tilde{\gamma}^2 < 0$ ). Эти интервалы принято называть «щелями устойчивости». Ширина  $m$ -й щели зависит от положения кожуха и равна  $\Delta nq = (a_k/b)^{2m}$ . Известно, что именно в этих щелях устойчивости работают современные токамаки.

При  $\varepsilon \neq 0$  из уравнения (3.18) следует, что ширина щели устойчивости зависит от давления плазмы. Полагая, что ширина щели достаточно мала, найдем приближенное решение дисперсионного уравнения:

$$\tilde{\gamma}^2 \simeq \pm \varepsilon(\beta_J + 1) \sqrt{m/(m+1)} - (a_k/b)^{2m+2}. \quad (3.19)$$

Очевидно, что расщепление растет с повышением  $\beta_J$ , а ширина щели устойчивости при этом уменьшается (рис. 28). Другими словами, при

повышении давления плазмы в токамаке возможна раскачка баллонных мод винтовой неустойчивости. Заметим, что слагаемое, пропорциональное  $\beta_J$  в выражении (3.19), связано с  $dp_0/da$  в потенциальной энергии (3.13), а единица возникла из токового члена.

Условие устойчивой работы токамака в  $m$ -й щели имеет вид:

$$\beta < \beta_c = \frac{\varepsilon}{q^2} \left[ \sqrt{\frac{m+1}{m} \left( \frac{a_k}{b} \right)^{2m+2}} - \varepsilon \right], \quad (3.20)$$

При давлении плазмы, меньшем критического, определяемого из условия (3.20), и при любом спадающем распределении плотности тока плазменный шнур устойчив. При давлении, большем  $\beta_c$ , вопрос об

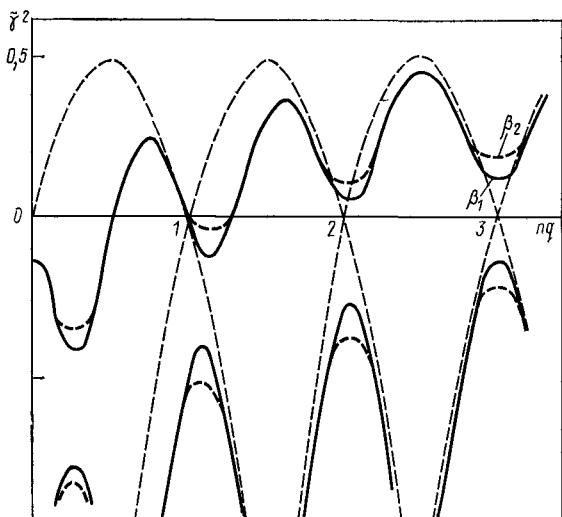


Рис. 28. Спектр колебаний тороидального шнура с однородным током при наличии кожушки. Пунктирные кривые соответствуют расщеплению при большем давлении  $\beta_{J_2} < \beta_{J_1}$

устойчивости зависит от конкретного распределения, так как обострение профиля тока оказывает стабилизирующее действие [68]. На рис. 29 изображена зависимость нормированного инкремента от  $nq(a_k)$  при параболическом распределении тока  $j = j_0 (1 - a^2/a_k^2)$  и  $\varepsilon\beta_J$  равном нулю. Из сравнения рис. 27 и 29 видно, что обострение профиля тока приводит к появлению щелей устойчивости, аналогичных щелям, возникающим при однородном токе в случае приближения кожушки к границе плазмы. Ясно, что в случае любого спадающего распределения плотности тока увеличение давления закрывает щели устойчи-

вости, а различие заключается в том, что кожух в основном влияет на низкие моды, а обострение профиля тока — на высокие моды.

Аналитическое исследование влияния баллонного эффекта на винтовую неустойчивость для поверхностного тока было проведено в ра-

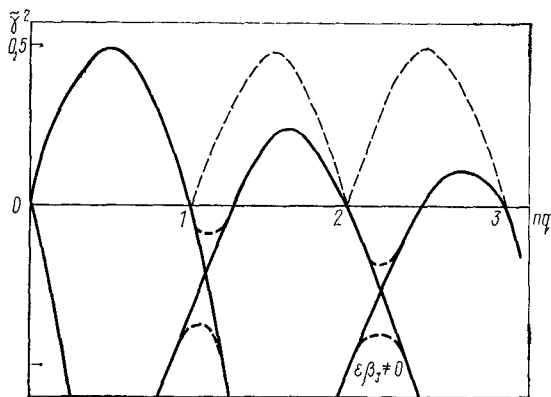


Рис. 29. Спектр колебаний цилиндрического шнура с параболическим током без кожуха (сплошные кривые). Пунктир показывает расщепление, возникающее при изгибании цилиндра в тор

боте [69]. На рис. 30 показаны зависимости нормированного инкремента. Видно, что при заданном положении кожуха  $b/a_R = 1,6$  увеличение давления приводит к росту инкремента, а при  $\epsilon\beta_J = 0,3$  область ус-

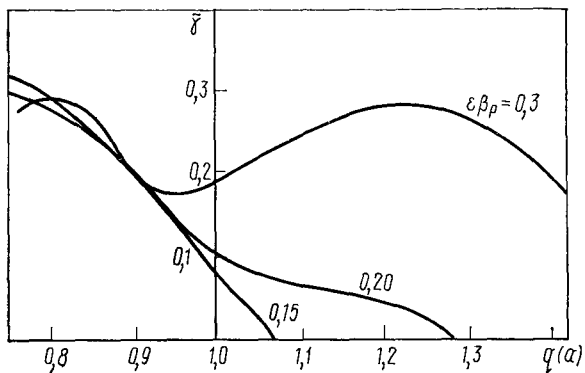


Рис. 30. Зависимость нормированного инкремента  $\tilde{\gamma}$  от  $q$  ( $a$ ) в случае скинированного тока относительно моды  $n=1$  при  $b/a=1,6$  и различных  $\epsilon\beta_p$

тойчивости вообще исчезает. Рис. 31 демонстрирует те же зависимости, но при фиксированном давлении  $\epsilon\beta_J = 0,2$  и изменяющемся положении кожуха. Для  $b/a < 1,4$  мода  $n = 1$  становится устойчивой, когда

$q(a_k) > 1$ . При более далеком расположении кожуха для устойчивости требуется повышение коэффициента запаса устойчивости.

Хотя эффект закрывания щелей при произвольном распределении плотности тока по сечению тороидального шнура требует конкретных

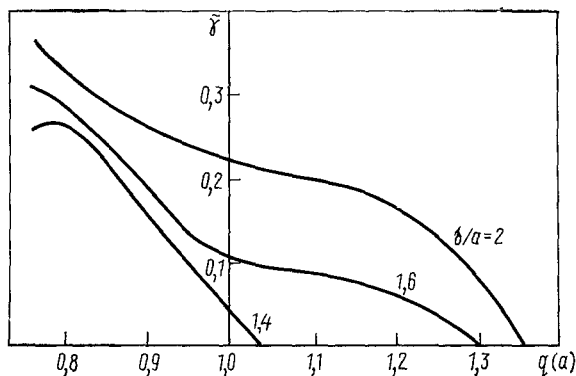


Рис. 31. Зависимость нормированного инкремента  $\tilde{\gamma}$  от  $q(a)$  при  $\varepsilon\beta_p = 0,2$  для различных  $b/a$

расчетов, качественно этот эффект хорошо понятен в рамках приведенных выше моделей. Зависимости  $\beta_c$  от профиля тока для низких мод будут рассмотрены в следующем параграфе численно.

### § 3.2. Численные расчеты низких мод

Расчеты устойчивости плазмы в токамаке относительно низких мод колебаний при свободной границе есть, по существу, изучение влияния баллонных эффектов на винтовую неустойчивость, т. е. изучение баллонных мод винтовой неустойчивости. Физическая природа этих мод была выяснена в § 3.1, а теперь рассмотрим ограничения по величине допустимого давления, возникающие в токамаках с произвольной формой сечения при конкретных равновесных распределениях параметров.

Начнем с наиболее простой для численного счета модели, когда ток скинирован и давление плазмы постоянно по сечению шнура [43]. Уравнение равновесия в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{B_p^2(\theta)}{B_0^2} = \frac{8\pi p}{B_0^2} - \frac{(1 - B_i^2/B_0^2)}{(1 + \varepsilon g \cos \theta)^2}, \quad (3.21)$$

где  $B_p(\theta)$  — полоидальное поле на поверхности плазмы;  $B_i$  и  $B_0$  — тороидальное поле на внутренней и внешней поверхности плазмы при  $\theta = \pi/2$ ;  $g(\theta)$  — функция, описывающая форму сечения поверхности плазмы  $\rho = R + ag(\theta)$ . Имеется две характерные области изменения равновесных параметров, которые соответствуют малому и большому давлению плазмы. При малом давлении  $B_i \simeq B_0$  и давление равнове-

шивается полоидальным полем  $B_p$  ( $\beta_p \simeq 1$ ), при высоком давлении  $8\pi p/B_0^2 \approx (1 - B_i^2/B_0^2)/(1 - \epsilon)^2$  и при увеличении давления ( $\beta_p \simeq R/a$ ) сепаратриса приближается к поверхности плазмы ( $q \rightarrow \infty$ ). На рис. 32

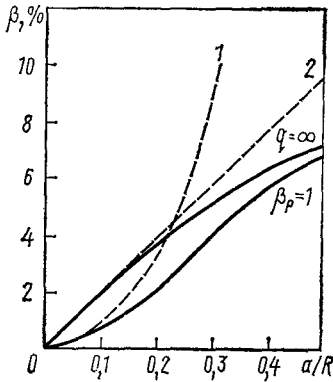


Рис. 32. Критическое  $\beta$  как функция тороидальности для круговых поверхностей в двух случаях  $q = \infty$  и  $\beta_p = 1$ . Кривые 1 и 2 — соответствующие аналитические расчеты

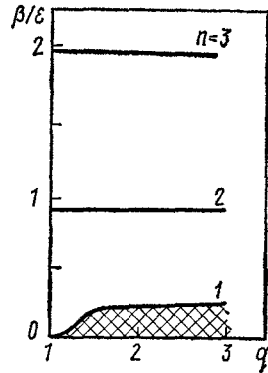


Рис. 33. Зависимость параметра  $\beta/\epsilon$  от  $q$  при скинновом токе для круговых поверхностей относительно трех мод ( $n=1, 2, 3$ ). Область устойчивости моды  $n=1$  заштрихована

представлена зависимость критического  $\beta$  для круговых магнитных поверхностей от величины тороидальности в двух случаях  $\beta_p = 1$  и  $q = \infty$ . Для сравнения пунктирными линиями показаны аналитичес-

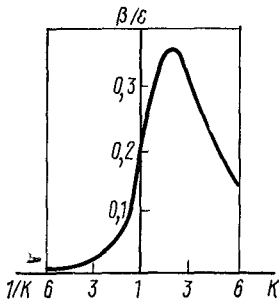


Рис. 34. Зависимость параметра  $\beta/n^2\epsilon$  от эллиптичности при скинновом токе относительно моды  $n=1$

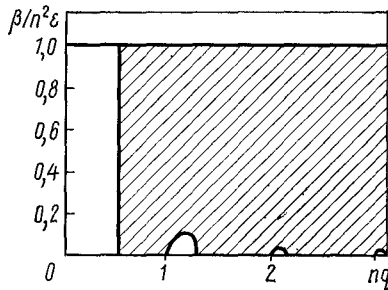


Рис. 35. Зависимость параметра  $\beta/n^2\epsilon$  от  $nq$  при квазиоднородном токе для  $b/a=1.4$ . Область неустойчивости заштрихована

кие зависимости, полученные разложением по  $\epsilon$  [42], первая кривая получена в предположении  $\beta_p \sim 1$ ,  $\beta \sim \epsilon^2$ , а вторая —  $\beta_p \sim 1/\epsilon$ ,  $\beta \sim \epsilon$ . Видно, что численный счет дает более низкие критические  $\beta$ . Рас-



четы проводились для трех первых гармоник, наиболее неустойчивой является мода  $n = 1$ , что следует из рис. 33, на котором изображены предельно допустимые  $\beta$  в зависимости от коэффициента запаса устойчивости. Для каждого  $n$  область устойчивости лежит ниже кривой. При малом давлении мода  $n = 1$  неустойчива ниже предела Крус-

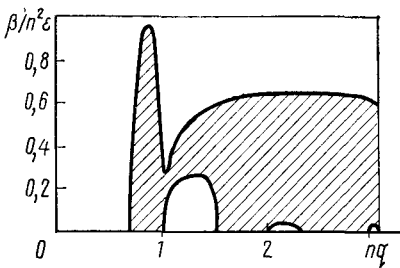


Рис. 36. Зависимость параметра  $\beta/n^2\epsilon$  от  $nq$  для  $b/a=1,2$

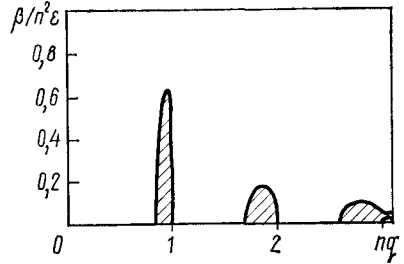


Рис. 37. Зависимость параметра  $\beta/n^2\epsilon$  от  $nq$  для  $b/a=1,1$

кала—Шафранова ( $q = 1$ ) и устойчива выше этого предела. При увеличении давления проявляется дестабилизирующий баллонный эффект и при  $\beta > 0,21\epsilon$  винтовая мода  $n = 1$  неустойчива при любом значении  $q$ .

В случае большого давления плазмы ( $q \rightarrow \infty$ ) была рассмотрена устойчивость моды  $n = 1$  для эллиптических магнитных поверхностей.

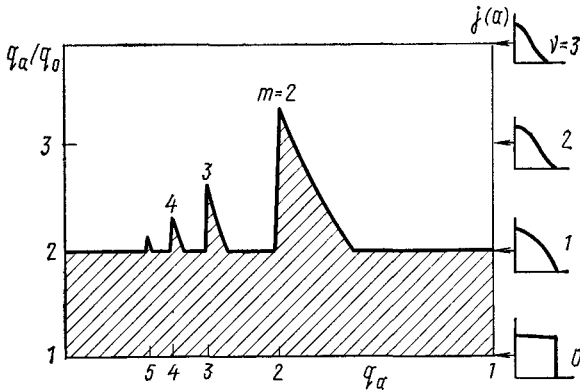


Рис. 38. Диаграмма неустойчивости низких мод  $j(a) = j_0 (1 - a^2/a_k^2)^\nu$

Рис. 34 показывает, что вытягивание шнура в горизонтальном направлении ухудшает устойчивость, а при вытягивании шнура в вертикальном направлении ( $K > 1$ ) имеется оптимальное значение  $K = 2,2$ , при котором  $\beta = 0,37\epsilon$  (в круге  $\beta = 0,21\epsilon$ ). Более реалистическая модель с квазиоднородным продольным током при наличии кожуха была рассмотрена в работе [43]. Когда кожух достаточно удален от плазмы  $b/a_k = 1,4$ , то соответствующая диаграмма устойчивости изображена

на рис. 35 в плоскости  $\beta$ ,  $nq$ . При малом давлении плазмы баллонный эффект, пропорциональный  $\varepsilon\beta_L = \varepsilon^3\beta/q^2$ , почти не влияет на устойчивость и щели устойчивости определяются уравнением, полученным для цилиндрического шнура [68]:

$$m - 1 + (a_h/b)^{2m} < nq < m. \quad (3.22)$$

Этот результат также следует из (3.18) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При увеличении давления плазмы щели устойчивости закрываются в полном соответствии с аналитическими расчетами [см. § 3.1 (3.19)]. При приближении кожуха к границе плазмы  $b/a_h = 1,2$  щели устойчивости расширяются, а также появляется вторая область устойчивости при большом  $\beta$  (рис. 36). При еще большем приближении кожуха к границе  $b/a_h = 1,1$  (рис. 37) вторая область устойчивости сливается с щелями устойчивости и можно говорить о «щелях неустойчивости», которые исчезают при закрепленной границе плазмы.

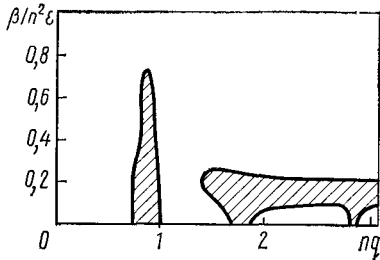


Рис. 39. Зависимость параметра  $\beta/n^2\varepsilon$  от  $nq$  при спадающем профиле тока ( $\nu=2$ ) для  $b/a=1,2$ . Область неустойчивости заштрихована

Влияние профиля тока на устойчивость низких мод в токамаке при фиксированном давлении, подробно рассмотренное в работе [70], представлено на диаграмме устойчивости в плоскости  $q_a/q_0$ ,  $q_a$  (рис. 38) для мод с  $n=1$  и  $m=2, 3, 4$ . Профиль тока задавался в форме  $j = j_0 (1 - a^2/a_k^2)^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ),

рассчитанное в работе [70], представлено на диаграмме устойчивости в плоскости  $q_a/q_0$ ,  $q_a$  (рис. 38) для мод с  $n=1$  и  $m=2, 3, 4$ . Профиль тока задавался в форме  $j = j_0 (1 - a^2/a_k^2)^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ),

рассчитанное в работе [70], представлено на диаграмме устойчивости в плоскости  $q_a/q_0$ ,  $q_a$  (рис. 38) для мод с  $n=1$  и  $m=2, 3, 4$ . Профиль тока задавался в форме  $j = j_0 (1 - a^2/a_k^2)^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ),

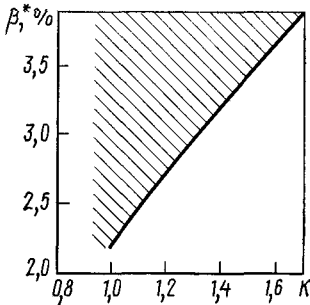


Рис. 40. Критическое  $\beta^*$  как функция эллиптичности относительно моды  $n=1$  для конфигурации с  $A=3$ ,  $\delta=0,25$ ;  $l=2$  и  $1 < q < 3$

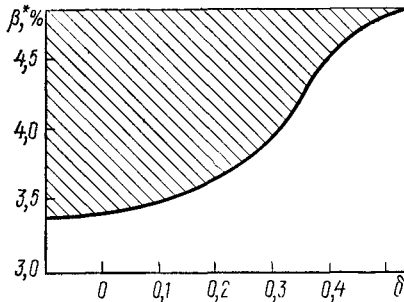


Рис. 41. Критическое  $\beta^*$  как функция треугольности относительно моды  $n=1$  для конфигурации с  $A=3$ ;  $K=1,65$ ;  $l=2$  и  $1 < q < 3$

а кожух отсутствовал. Диаграмма показывает, что обострение профиля тока приводит к стабилизации винтовых мод.

Оценку влияния обострения профиля тока на величину критического  $\beta$  в токамаке позволяет получить сравнение диаграммы на рис. 39

для спадающего профиля тока с диаграммой на рис. 36 для квазиодно-родного тока при одинаковом удалении кожуха от плазмы  $b/a_k = 1, 2$ . Видно, что для спадающего тока вторая область устойчивости слилась с щелью устойчивости первой моды, а значение второго критического  $\beta/\epsilon n^2$ , при котором устойчивы все моды, снизилась с 0,65 до 0,28.

Зависимости критического  $\beta$  при спадающем профиле тока от формы плазменного шнура для моды  $n = 1$  были рассчитаны в работе [64] и представлены на рис. 40 и 41. Рис. 40 характеризует чисто эллиптический плазменный шнур, а рис. 41 характеризует шнур с  $D$ -образной формой сечения. Видно, что критическое  $\beta$ , равное 2,1% для кругового сечения, удалось поднять до 3,5% при умеренной эллиптичности ( $K = 1,6$ ) и до 4,9% при  $D$ -образной форме ( $K = 1,6; \delta = 0,5$ ).

## ГЛАВА 4

### ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

#### § 4.1. Исходные уравнения и их упрощение

Исследование устойчивости плазмы при наличии диссипации за счет конечной проводимости будем проводить исходя из уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики при учете сжимаемости:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]; \quad (4.1)$$

$$\frac{dp}{dt} + \gamma_0 \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (4.2)$$

( $\gamma_0$  — показатель адиабаты)

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]), \quad (4.3)$$

и уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (4.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

В отличие от идеально проводящей плазмы ( $\sigma = \infty$ ), когда из-за замороженности плазмы в магнитное поле возможны лишь непотенциальные возмущения, в плазме с конечной проводимостью могут развиваться как непотенциальные, так и потенциальные возмущения. Поэтому удобно ввести в рассмотрение векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный потенциал  $\varphi$ :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (4.7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.8)$$

Систему уравнений (4.1)–(4.8) можно упростить, используя разложение по отношению полей  $B_z^2/B_0^2$  [53]. Для этого, как и в идеальной плазме (см. § 1.2), представим плотность тока в виде двух слагаемых  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \hat{\alpha}\mathbf{B}$ , где  $\hat{\alpha} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}/B^2$ . Выражение для поперечной компоненты тока следует из уравнения движения (4.1):

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{B^2} \left( [\mathbf{B}\nabla\rho] + \rho \left[ \mathbf{B} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] \right). \quad (4.9)$$

Поперечную компоненту скорости, входящую в (4.9), определим из закона Ома (4.3):

$$\mathbf{v} = -\frac{c[\mathbf{B}\mathbf{E}]}{B^2} - \frac{c^2}{\sigma B^2} \left( \nabla\rho + \rho \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right). \quad (4.10)$$

Высокочастотные магнитно-звуковые колебания в токамаке существенно подавлены сильным продольным магнитным полем, и наибольшую опасность представляют альфвеновские и ионно-звуковые колебания. При их рассмотрении можно пренебречь поперечной инерцией и диффузией плазмы поперек магнитного поля, так как в высокотемпературной плазме скинное время  $\tau_s = 4\pi\sigma a^2/c^2$  много больше альфвеновского времени  $\tau_A = a/c_A$  ( $c_A = B^2/4\pi\rho$ ), т. е. в выражении (4.10) сохраним только первый член.

Из условия замыкания токов  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , используя (4.9) и (4.10), получаем удобное для исследования устойчивости соотношение

$$\mathbf{B}\nabla\hat{\alpha} - c[\nabla\rho\mathbf{B}]\nabla \frac{1}{B^2} + \frac{c^2}{B^2} \text{div } \rho \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (4.11)$$

Считая, что силовые линии только искривляются, не сгущаясь и не разряжаясь, будем описывать это искривление одной компонентой  $\tilde{A}_S$ :

$$\tilde{B}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{A}_S}{\partial \theta}, \quad B^0 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{A}_S}{\partial a}, \quad (4.12)$$

Возмущением продольной компоненты магнитного поля будем пренебрегать, так как оно порядка  $\beta$  по сравнению с возмущениями поперечных компонент. При этом линеаризованное уравнение (4.11) имеет следующий вид:

$$\mathbf{B}^0 \nabla \tilde{\alpha} + \mathbf{B} \nabla \alpha_0 + c \left[ \nabla \frac{1}{B_0^2} \mathbf{B}^0 \right] \nabla \tilde{\rho} - \gamma \frac{c^2}{B_0^2} \text{div } \rho_0 \nabla \tilde{\varphi} = 0. \quad (4.13)$$

Здесь

$$\tilde{\alpha} = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{B_0^S} \hat{\Delta}_\perp A_S, \quad (4.14)$$

а оператор  $\hat{\Delta}_\perp$  был введен при исследовании устойчивости идеальной плазмы [см. выражение (1.35)].

Величина  $\tilde{\alpha}$ , кроме уравнения (4.13), может быть найдена также и из продольной компоненты закона Ома (4.3):

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sigma B_0^S}{B_0^S} \left( -\frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \tilde{\varphi} - \frac{\gamma}{c} \tilde{A}_S \right). \quad (4.15)$$

Приравнявая выражения (4.14) и (4.15), свяжем между собой  $\tilde{A}_S$  и  $\tilde{\varphi}$ :

$$\left( 1 - \frac{a^2 \hat{\Delta}_\perp}{\gamma \tau_S} \right) \tilde{A}_S = -\frac{c}{\gamma} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \tilde{\varphi}. \quad (4.16)$$

Теперь осталось выразить возмущенное давление через  $\tilde{A}_S$  и  $\tilde{\varphi}$ , для этого воспользуемся уравнением (4.2), предварительно вычислив  $\text{div } \mathbf{v}$  в нулевом приближении по кривизне:

$$\text{div } \mathbf{v} = -\frac{1}{\gamma \rho_0} \hat{k}_\parallel \left( \hat{k}_\parallel \tilde{p} + \frac{\rho'_0}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{\partial \tilde{A}_S}{\partial \theta} \right), \quad (4.17)$$

При получении этого выражения было учтено, что  $\text{div } \mathbf{v}_\perp = 0$  в рассматриваемом приближении, а продольная скорость  $\mathbf{v}_\parallel$  определялась из продольной компоненты уравнения движения (4.1). Подставив (4.17) в линеаризованное уравнение (4.2), получим:

$$\left( 1 - \frac{c_S^2}{\gamma^2} \hat{k}_\parallel^2 \right) \tilde{p} = \frac{\rho'_0}{\sqrt{g} B_0^S} \left( \frac{c}{\gamma} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{c_S^2}{\gamma^2} \hat{k}_\parallel \frac{\partial \tilde{A}_S}{\partial \theta} \right), \quad (4.18)$$

где  $c_S^2 = \gamma_0 \rho_0 / \rho_0$ .

Для наглядного представления физической природы колебаний рассмотрим случай мелкомасштабных желобковых возмущений. Разрешив уравнение (4.16) относительно  $\tilde{A}_S$  символически, из уравнений (4.13) и (4.18) получим:

$$\frac{c^2}{4\pi} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \hat{\Delta}_\perp \frac{\hat{k}_\parallel}{D} \tilde{\varphi} + c \left[ \nabla \frac{1}{B_0^S} \mathbf{B}^0 \right] \nabla \tilde{p} - \gamma \frac{c^2}{B_0^S} \text{div } \rho_0 \nabla \tilde{\varphi} = 0; \quad (4.19)$$

$$\left( 1 - \frac{c_S^2}{\gamma^2} \hat{k}_\parallel^2 \right) \tilde{p} = \frac{\rho'_0}{\sqrt{g} B_0^S} \frac{c}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 1 - \frac{c_S^2}{\gamma^2} \frac{\mathbf{B}^0 \nabla}{B_0^S} \frac{\hat{k}_\parallel}{D} \right] \tilde{\varphi}, \quad (4.20)$$

где  $D = 1 - a^2 \hat{\Delta}_\perp / \gamma \tau_S$ ,  $\hat{k}_\parallel = \mathbf{B}^0 \nabla / B_0^S$ .

Из этих уравнений видно, что в случае цилиндрического шнура [второе слагаемое в (4.19) равно нулю], они описывают альфвеновские и ионно-звуковые колебания независимо. В токамаке эти ветви колебаний зацеплены между собой.

Система из трех уравнений (4.13), (4.16) и (4.18) значительно проще исходной системы (4.1)—(4.8), но еще достаточно сложна, так как состоит из уравнений в частных производных. Для дальнейших упрощений воспользуемся методом эквивалентных гармоник, описанным

в § 2.1. Для больших азимутальных чисел ( $m = nq \gg 1$ ) все возмущенные величины представим в виде:

$$\tilde{\varphi}(a, \theta, z) = \sum_m \exp \left[ im\theta + i \frac{n}{R} z \right] \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp \{-i[m - nq(a)y]\} dy \quad (4.21)$$

и получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для фурье-образов  $\varphi(y)$  и  $p(y)$  [53]:

$$\frac{d}{dy} \frac{G(a, y)}{(1+G/\Gamma)} \frac{d\varphi}{dy} - \gamma^2 \tau_0^2 (1 + S^2 y^2) \varphi + \frac{1}{2} \alpha R B_0^S \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{B_0^S} - \frac{Sy}{a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_0^S} \right) \frac{\gamma}{inq} \frac{\sqrt{g}}{c} \frac{B_0^S}{\rho'_0} p(y) = 0; \quad (4.22)$$

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma^2 \tau_c^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) p = \frac{inq}{\gamma} \frac{c}{\sqrt{g}} \frac{\rho'_0}{B_0^S} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma^2 \tau_c^2} \frac{d}{dy} \frac{1}{(1+G/\Gamma)} \frac{d}{dy} \right] \varphi, \quad (4.23)$$

где  $S = q'a/q$ ,  $\alpha = -8\pi\rho'_0 Rq^2/B_0^2$ ,  $\tau_c = Rq/cs$ ,

$$\tau_0 = Rq/c_A, \quad \Gamma = \gamma\tau_S/n^2 q^2, \quad G = a \left( \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{S^2 y^2}{a^2} - 2 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{Sy}{a} \right).$$

Система уравнений (4.21) и (4.22) позволяет исследовать идеальные и диссипативные баллонные моды желобковой неустойчивости в токамаке. В случае идеально проводящей плазмы ( $\tau_S \rightarrow \infty$  и  $\Gamma \gg G$ ) эта система сводится к одному уравнению для  $\varphi$  [см. уравнение (2.9)]. Решение этого уравнения, а соответственно и условие устойчивости плазмы в рамках идеальной магнитной гидродинамики, как видно из § 2.3 и 2.4, существенным образом зависит от формы магнитных поверхностей.

Для неидеально проводящей плазмы ( $\Gamma \ll G$ ) система уравнений (4.22) и (4.23) принимает более простой вид:

$$\Gamma \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \gamma^2 \tau_0^2 (1 + S^2 y^2) \varphi + \\ + \frac{1}{2} R B_0^S \left( \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{B_0^S} - \frac{Sy}{a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{B_0^S} \right) \hat{p} = 0; \quad (4.24)$$

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma^2 \tau_c^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) \hat{p} = \left( 1 - \frac{\Gamma}{\gamma^2 \tau_c^2} \frac{d}{dy} \frac{1}{G} \frac{d}{dy} \right) \varphi, \quad (4.25)$$

$$\text{где } \hat{p} = \frac{\gamma}{inq} \frac{\sqrt{g} B_0^S}{\rho'_0} p(y), \quad G \simeq 1 + S^2 y^2.$$

Эти уравнения уже в гораздо меньшей степени зависят от конкретной геометрии. Можно показать, что в этих уравнениях имеется два различных масштаба:  $y \sim 1$  и  $y \gg 1$ , что позволяет применить к ним метод усреднения Ван дер Поля.

Для круговых магнитных поверхностей усредненные уравнения записываются следующим образом:

$$\Gamma \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dy^2} - \frac{\Gamma^2}{N^2} (1 - S^2 y^2) \bar{\Phi} - \alpha V_0 \bar{\rho} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{(1 + S^2 y^2 + M^2/\Gamma)}{\Gamma (1 + M^2/\Gamma^2) [1 + \Gamma (1 + S^2 y^2)/N^2]} \bar{\rho} = 0; \quad (4.26)$$

$$\left(1 - \frac{M^2}{\Gamma^2} \frac{d^2}{dy^2}\right) \bar{\rho} = \left(1 - \frac{M^2}{\Gamma} \frac{d}{dy} \frac{1}{1 + S^2 y^2} \frac{d}{dy}\right) \bar{\Phi}. \quad (4.27)$$

Здесь  $M = \frac{\tau_S}{\tau_c} \frac{1}{n^2 q^2}$ ,  $N = \frac{\tau_S}{\tau_\theta} \frac{1}{n^2 q^2}$  — параметры, характеризующие отношение скингового времени к звуковому и альфвеновскому соответственно;  $M^2 = \gamma_0 \beta N^2$ ,  $V_0 = \left[ \frac{R}{2} \frac{\partial}{\partial a} (g_{33})_0 - \frac{e}{q^2} \right]$  — величина, характеризующая глубину магнитной ямы в токамаке.

Существенная особенность этих уравнений, обусловленная конечной проводимостью плазмы, состоит в их несамосопряженности. Это означает, что инкремент  $\Gamma$  не обязательно является вещественным, т. е. в спектре возможно появление колебательных возмущений [71]. Физическая природа этой несамосопряженности ясна: наряду с монотонной альфвеновской неустойчивостью возможно развитие колебательной неустойчивости, связанной с ионным звуком.

Баллонные моды в токамаке при  $nq \gg 1$  представляют собой локализованные по радиусу шнура возмущения, которым соответствуют большие характерные  $y$  в фурье-пространстве. При  $y^2 \gg M^2/\Gamma^2$  или в обычных обозначениях  $\gamma^2 \gg k_{\parallel}^2 c_s^2$  уравнения (4.26) и (4.27) сводятся к одному уравнению:

$$\Gamma \bar{\Phi}'' - \left\{ \frac{\Gamma^2}{N^2} (1 + S^2 y^2) + \alpha V_0 - \frac{\alpha^2}{2} \frac{(1 + S^2 y^2 + M^2/\Gamma)}{\Gamma (1 + M^2/\Gamma^2) [1 + \Gamma (1 + S^2 y^2)/N^2]} \right\} \bar{\Phi} = 0. \quad (4.28)$$

Условие  $\gamma^2 \gg k_{\parallel}^2 c_s^2$  означает, что усредненное возмущение электростатического потенциала не успевает выравниваться вдоль силовых линий за счет конечной скорости звука.

Таким образом, задача об устойчивости плазмы относительно диссипативных баллонных мод свелась к решению уравнения (4.28).

## § 4.2. Беспороговые диссипативные баллонные моды

Перейдем теперь к анализу и решению уравнения (4.28):

$$\overline{\varphi}'' - V(\Gamma, y) \overline{\varphi} = 0. \quad (4.29)$$

Потенциал в этом уравнении довольно сложно зависит от искомого инкремента  $\Gamma$ :

$$V(\Gamma, y) = \frac{\alpha V_0}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{N^2} (1 + S^2 y^2) - \frac{\alpha^2 (1 + S^2 y^2 + M^2/\Gamma)}{2\Gamma^2 (1 + M^2/\Gamma^2) [1 + \Gamma (1 + S^2 y^2/N^2)]}, \quad (4.30)$$

Все слагаемые в этом выражении имеют наглядный физический смысл: первое слагаемое характеризует стабилизирующее влияние магнитной ямы, второе слагаемое учитывает инерцию плазмы, третье слагаемое описывает дестабилизирующий баллонный эффект. Условие появления первого уровня в потенциальной яме (4.30) определяет максимально возможный инкремент диссипативных баллонных мод.

Можно показать, что решение уравнения (4.29) с потенциалом (4.30) существенным образом зависит от отношений  $S/S_h$  ( $S_h = \alpha^{1/2}/V_0^{1/2}N$ ),  $\alpha/\alpha_h$  ( $\alpha_h$  определяется из условия  $\alpha = 2V_0$ ) и  $\beta/\beta_h$  ( $\beta_h = \alpha^{4/3}/N^{2/3}$ ). В высокотемпературной плазме  $N \gg 1$ , поэтому практический интерес представляет шир порядка единицы и много больший  $S_h$  ( $S_h \ll S \sim 1$ ). Вначале рассмотрим отдельно два предельных случая большого ( $\beta \gg \beta_h$ ) и малого давлений плазмы ( $\beta \lesssim \beta_h$ ).

В случае большого давления плазмы, когда существенно возмущение магнитного поля и колебания являются непотенциальными, уравнение (4.29) представляет собой уравнение осциллятора, что позволяет сразу написать выражение для инкремента:

$$\Gamma = \begin{cases} \frac{N^{2/3}}{S^{2/3}} \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha V_0 \right)^{2/3}, & \alpha \geq \alpha_h; \\ 0, & \alpha \leq \alpha_h. \end{cases} \quad (4.31)$$

Этот инкремент описывает непотенциальную гравитационно-диссипативную неустойчивость [49, 72], имеющую пороговый характер по величине относительного градиента давления  $\alpha$ .

Условие устойчивости диссипативной плазмы, следующее из (4.31),

$$\alpha V_0 - \alpha^2/2 > 0, \quad (4.32)$$

интересно сравнить с критериями устойчивости идеальной плазмы — критерием Мерсье

$$\frac{1}{4} S^2 + \alpha V_0 - \frac{\alpha^2}{2} = 0 \quad (4.33)$$

и критерием баллонных мод

$$\frac{1}{2} S^2 - \frac{1}{2} S \alpha^2 - \frac{3}{2} \alpha \exp\left(-\frac{1}{|S|}\right) + \alpha V_0 - \frac{\alpha^2}{2} > 0. \quad (4.34)$$



Из этих выражений следует, что условие устойчивости диссипативной плазмы (4.32), в которое не входит шир, всегда жестче критерия Мерсье, но может быть мягче критерия баллонных мод. Отсюда ясно, что непотенциальная гравитационно-диссипативная неустойчивость является не самой опасной диссипативной неустойчивостью.

Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим случай малого давления плазмы  $\beta < \beta_r$  и  $\alpha < \alpha_r$ , когда колебания являются чисто потенциальными. При этом потенциальная яма (4.30) имеет минимум, смещенный относительно начала координат. Аппроксимация этой ямы вблизи ее минимума осцилляторным потенциалом позволяет получить следующее уравнение для нахождения инкремента [53]:

$$\Gamma^3 + \gamma_0 \beta N^2 \Gamma = \frac{1}{2} \alpha^2 N^2. \quad (4.35)$$

Это уравнение имеет один действительный корень:

$$\Gamma_1 = u + v, \quad (4.36)$$

где

$$u = \left( \frac{1}{4} \alpha^2 N^2 + \sqrt{\frac{1}{16} \alpha^4 N^4 + \frac{\gamma_0^3}{27} \beta^3 N^3} \right)^{1/3},$$

$$v = \left( \frac{1}{4} \alpha^2 N^2 - \sqrt{\frac{1}{16} \alpha^4 N^4 + \frac{\gamma_0^3}{27} \beta^3 N^3} \right)^{1/3},$$

и два комплексно-сопряженных корня:

$$\Gamma_{2,3} = -\frac{1}{2} \Gamma_1 \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (u - v). \quad (4.37)$$

Первый корень описывает беспороговые диссипативные баллонные моды, которые представляют собой альфвеновские возмущения, нарастающие при сколь угодно малом градиенте давления с инкрементом:

$$\gamma \sim \frac{1}{\tau_S} \left( \frac{\tau_S}{\tau_\theta} \right)^{2/3}. \quad (4.38)$$

Этот инкремент много больше обратного скин-слоевого времени, так как в высокотемпературной плазме  $\tau_S/\tau_\theta \gg 1$ . При увеличении давления плазмы инкремент баллонных мод уменьшается. Два других корня соответствуют ветвям затухающих ионно-звуковых колебаний. При увеличении давления частота этих колебаний возрастает, а декремент уменьшается.

Для того чтобы получить результат, справедливый при любых значениях параметров  $\beta$  и  $\alpha$ , т. е. проследить переход от потенциальных возмущений к непотенциальным, решим уравнение (4.29) вариационным методом. Для этого запишем функционал, соответствующий уравнению (4.29):

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'^2 + V(\Gamma, y)\varphi^2] dy, \quad (4.39)$$

и подставим в него в качестве пробной функции функцию вида:

$$\varphi = 1 / (y^2 + \lambda^2), \quad (4.40)$$

где  $\lambda$  — вариационный параметр.

Проделав необходимые интегрирование и варьирование, из условий  $W = 0$  и  $dW/d\lambda = 0$  нетрудно получить систему уравнений для определения инкремента и параметра  $\lambda$ :

$$(\Gamma^3 + \gamma_0 \beta N^2 \Gamma) \left[ 1 - \frac{N^2 (\alpha^2 - 2\alpha V_0)}{4S^2 \Gamma^2 \lambda^2} \right] = \frac{1}{2} \alpha^2 N^2. \quad (4.41)$$

$$\frac{N^2}{2\Gamma^2 \lambda^2} (\alpha^2 - 2\alpha V_0) + \frac{S^3 \Gamma^{1/2} \lambda}{N} = \frac{N^2}{\Gamma \lambda^4}. \quad (4.42)$$

Из этих выражений можно получить оба предельных случая, рассмотренных выше.

На рис. 42 представлены зависимости инкремента диссипативных баллонных мод  $\Gamma/N^{2/3}$  от градиента давления плазмы  $\alpha$ , рассчитанные по формулам (4.41) и (4.42) при различных значениях величины  $\beta$ .

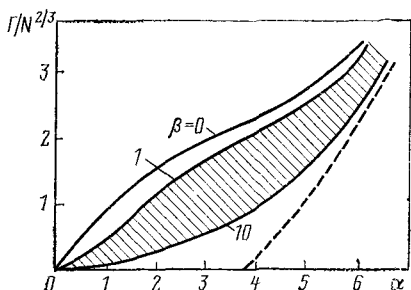


Рис. 42. Зависимость нормированного беспорогового инкремента  $\Gamma/N^{2/3}$  от  $\alpha$  при различных значениях  $\tilde{\beta} = \beta \gamma_0 N^{2/3}$

Кривая 1 соответствует  $\beta = 0$  или полностью сжимаемой жидкости  $\gamma_0 = 0$ , кривая 2 построена при  $\tilde{\beta} = \beta \gamma_0 N^{2/3} = 1$ , а кривая 3 — при  $\tilde{\beta} = 10$ . Между кривыми 2 и 3 лежит область, соответствующая высокотемпературной плазме. Пунктирная кривая изображает пороговый инкремент непотенциальной гравитационно-диссипативной неустойчивости. При получении этого инкремента фактически предполагалось, что скорость звука бесконечна, в этом случае ионный звук

выравнивал возмущения электростатического потенциала и давления вдоль силовых линий и при  $\alpha < \alpha_h$  неустойчивость не развивалась. При учете конечности скорости звука картина иная: возмущения потенциала и давления не успевают выравниваться вдоль силовых линий и при любом градиенте давления существует баллонная неустойчивость, развивающаяся на альфвеновских возмущениях. Инкремент этих диссипативных беспороговых баллонных мод уменьшается при увеличении давления плазмы, что видно из рисунка.

## Заключение

В настоящем обзоре рассмотрено влияние баллонных эффектов на устойчивость плазмы в токамаке в рамках линейной теории.

Аналитические и численные расчеты позволяют понять основные механизмы, приводящие к неустойчивости баллонных мод. Критиче-

ское давление, с которого начинают развиваться баллонные моды как винтовой, так и желобковой неустойчивостей, оказывается довольно малым (для токамака с круговым сечением магнитных поверхностей  $\beta_k = 2 \div 3\%$ ). Если эксперименты покажут, что эти неустойчивости являются опасными, то критическое  $\beta$  можно, как следует из теории, поднять путем выбора формы магнитных поверхностей ( $D$ -образная форма), и профилированием плотности тока по сечению шнура. Таким образом, можно без особых ухищрений получить  $\beta_k \sim 5 \div 6\%$ .

С учетом диссипации баллонные моды теряют свой пороговый характер. Однако в этом случае инкремент колебаний и область локализации существенно меньше идеальных.

Насколько баллонные моды могут быть опасны для эксперимента, трудно сказать, не изучив нелинейную стадию развития неустойчивости.

Только из нее (а также, естественно, из эксперимента) можно извлечь информацию о возникающем течении плазмы и макроскопических эффектах (диффузии, теплопроводности), к которым можем проводить развитие неустойчивости. В настоящее время в нелинейной теории получены только первые результаты. Поэтому ниже мы в основном ограничимся качественным обсуждением возможных эффектов.

Начнем с диссипативной неустойчивости. Из теории следует, что ее инкремент и локализация гораздо меньше соответствующих величин для идеального случая, и поэтому можно думать, что ее проявление будет выражено слабее.

Если воспользоваться размерностной оценкой для коэффициентов переноса  $\chi \sim D \sim \nu/k^2$ , то для диссипативной неустойчивости, используя результаты § 4.2, нетрудно получить  $\chi \sim a^2\alpha/\tau_S = c^2\alpha/4\pi\sigma$ . Эта величина порядка псевдоклассической и находится на уровне экспериментально наблюдаемых потерь.

Сложнее ответить на вопрос, что будет происходить при переходе через критическое  $\beta$  по идеальным модам. Некоторую информацию на этот счет можно извлечь из недавних численных расчетов [76] по крупномасштабным тирринг-модам в торе. В этих расчетах было показано, что на нелинейной стадии происходит перекрытие магнитных островов, соответствующих разным модам, и стохастизация магнитных силовых линий. Эти эффекты имеют место как в цилиндре, так и в торе. Однако в торе неустойчивость развивается несколько быстрее (баллонный эффект!) и приводит к более полной стохастизации магнитных силовых линий. Для крупномасштабных мод сам факт стохастизации может иметь второстепенное значение, так как гораздо раньше, чем проявляются эффекты, связанные со стохастизацией, шнур вывалится на стенку из-за развития неустойчивости срыва. Для баллонных мод желобковой неустойчивости ситуация может быть иной. Учитывая, что в первую очередь развиваются мелкомасштабные баллонные моды можно думать, что такие драматические явления, как срыв шнура, могут и не наблюдаться, и тогда основным эффектом может быть стохастизация силовых линий. Это явление, как уже было неоднократно показано [77—79], должно приводить в первую очередь к повышенной

электронной теплопроводности (диффузия тоже не исключена), оценкой для которой может служить формула типа Окавы:  $\chi \sim \frac{c^2}{\omega_p^2} \frac{v_e}{qR}$ .

Коэффициенты переноса могут быть и больше этого значения, если наряду со стохастизацией в коэффициенты переноса дает вклад конвекция плазмы.

Если процессы будут развиваться действительно таким образом, то при превышении  $\beta_h$  потери энергии из шнура будут резко возрастать и давление плазмы будет стабилизироваться где-то в районе  $\beta \sim \beta_h$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. International Tokamak Reactor: Zero Phase. IAEA, Vienna, 1980.
2. Saydon B. In: Proc. 2 U. N. Int. Conf., P. U. A. E. Geneva, 1958, v. 31, p. 157.
3. Marcier C. — Nucl. Fusion, 1960, v. 1, p. 47.
4. Green J. M., Johnson J. L. — Phys. Fluids, 1962, v. 5, p. 510.
5. Vineau M. — Conf. Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Salzburg, 1961, p. 35.
6. Соловьев Л. С. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 53, с. 626.
7. Shafranov V. D., Yurchenko E. I. — Nucl. Fusion, 1968, v. 8, p. 329.
8. Mercier C. — Ibid., 1964, v. 4, p. 213.
9. Михайловский А. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 64, с. 536.
10. Михайловский А. Б., Шафранов В. Д. — Там же, 1974, т. 66, с. 190.
11. Connor J. W., Hastie R. J., Taylor J. B. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 396.
12. Mercier C. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Innsbruck, 1979, v. 1, p. 701.
13. Погуце О. П., Юрченко Э. И. — Физика плазмы, 1979, т. 5, с. 786.
14. Furth H. D. e. a. — Conf. Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res. Vienna, 1966, v. 1, p. 127.
15. Kulsrud R. M. — Ibid., 1966, v. 1, p. 103.
16. Solovuev L. S., Shafranov V. D. — Ibid., 1966, v. 1, p. 189.
17. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. — Докл. АН СССР, 1966, т. 170, с. 811.
18. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1967, т. 53, с. 1157.
19. Ware A. A., Haas F. A. — Phys. Fluids, 1966, v. 9, p. 956.
20. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, 1971, v. 2, p. 519.
21. Mikhailovskii A. V. — Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 483.
22. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д., Юрченко Э. И. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, 1969, p. 175.
23. Küppers G., Tasso M. — Z. Naturforsch., 1972, Bd 27a, № 1, S. 23.
24. Yavlinskiy Ya. N. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 951.
25. Okamoto M., Wakatani M., Amano T. — 1975, v. 15, p. 225.
26. Galvao R. M. O. — Ibid., 1975, v. 15, p. 785.
27. Coppi B. e. a. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 2405.
28. Laval G., Maschke E. K., Pellat R. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 24, p. 1229.
29. Todd A. M. M. e. a. Ibid., 1977, v. 38, p. 826.
30. Bateman G., Peng Y. — K. — Ibid., 1977, v. 38, p. 829.
31. Coppi B. — Ibid., 1977, v. 39, p. 339.
32. Dobrott D., Nelson D. B. e. a. — Ibid., 1977, v. 39, p. 943.
33. Погуце О. П., Юрченко Э. И., — Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 344.
34. Chance M. S., Dewar R. L. e. a. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res., Innsbruck, 1979, v. 1, p. 677.
35. Jykes J. D. — Ibid., p. 733.
36. Sykes A., Turner M. F. e. a. — Ibid., p. 625.
37. Connor J. W., Hastie R. J., Taylor J. B. — Ibid., 1979, p. 674.

38. Zakharov L. E. — Ibid., p. 689.
39. Dory R. A., Bergen D. P. e. a. — Ibid., p. 579.
40. Pegoroto F., Schep T. — Ibid., p. 507.
41. Bateman G. — Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 1506.
42. Freidberg J. P., Haas F. A. — Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1909.
43. Freidberg J. P., Goedloed J. P. e. a. — Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Tokyo, 1975, v. 1, p. 505.
44. Pogutse O. P., Yurchenko E. I. PPPL t-122, 1977.
45. Шафранов В. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1970., т. 40, с. 241.
46. Todd A. M. M., Manickam J. e. a. PPPL-1470, 1978.
47. Furth P., Killen J., Rosenbluth M. — Phys. Fluids, 1963, v. 6, p. 459.
48. Johnson J. L., Greene J. M. — Plasma Phys., 1967, v. 9, p. 611.
49. Glasser A. H., Greene J. M., Johnson J. L. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 875.
50. Mikhailovskii A. B. — Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 95.
51. Михайловский А. Б. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 1226.
52. Bateman G., Nelson D. B. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 1, p. 805.
53. Погуце О. П., Юрченко Э. И. — Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 31, с. 479.
54. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1973, т. 65, с. 575.
55. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М. Атомиздат, 1967, с. 209.
56. Кадомцев Б. Б. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М., Атомиздат, 1963, с. 132.
57. Bernstein I. B., Frieman E. A. e. a. — Proc. Roy Soc. A, 1958, v. 244, p. 17.
58. Pogutse O. P., Yurchenko E. I. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 1629.
59. Lee Y. C., Van Dam J. W. Proc. High Beta Tokamak Theory Workshop. Varenna, 1977, p. 93.
60. Connor J. W. — Proc. Roy Soc. A., 1979, v. 365, p. 1.
61. Roberts K. V., Taylor J. B. — Phys. Fluids, 1965, v. 8, p. 315.
62. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963, с. 146.
63. Погуце О. П., Чудин Н. В., Юрченко Э. И. — Физика плазмы, 1980, т. 6, с. 621.
64. Todd A. M.M., Manickam J., Okabayshi e. a. — Nucl. Fusion, 1979, v. 19, p. 743.
65. Grim R. C., Greene J. M., Johnson J. L. In: Methods in Computational Physics. N. Y., Academic Press, 1976, v. 16, p. 253.
66. Clarke J. F., Sigmar D. J. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 70.
67. Gruber R., Schreiber R. e. a. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, 1975, v. 1, p. 593.
68. Шафранов В. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1970, т. 15, с. 175.
69. Wakatani M. — J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 38, p. 1481.
70. Wesson J. A., Sykes A. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, 1975, v. 1, p. 449.
71. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. — Конвективная устойчивость сжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1972, с. 174.
72. Михайловский А. Б. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М., Атомиздат, 1978, с. 126.
73. Coppi B. — Plasma Phys Contr. Nucl. Fus. Res., Brussel, CN B-3, 1980.
74. Strauss H. R., Park W. e. a. — Nucl. Fusion, 1980, v. 20, p. 638.
75. Fielding D. G., Haas F. A. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Innsbruck, 1979, v. 1, p. 630.
76. Carreras B., Hicks H. R., Lee D. K. ORNL/TM-7281, 1980.
77. Rechester A. B., Rosenbluth M. — Phys. Rev. Lett., 1978, v. 40, p. 38.
78. Kadomsev V. B., Pogutse O. P. — Plasma Phys. Contr. Nucl. Fus. Res., Innsbruck, 1979, v. 1, p. 649.
79. Parail V. V., Pogutse O. P. — Ibid., Brussel, IAEA CN B 13-2, 1980.
80. Mikhailovskii A. B., Demechenko V. V. 10 th Europ. Conf. on Contr. Fusion, 1981., B11.
81. Михайловский А. Б., Юрченко Э. И. Препринт ИАЭ—3505, 1981.

# РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ С ТОКОМ В ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

*Л. Е. Захаров, В. Д. Шафранов*

---

## Введение

Теории равновесия плазмы в магнитном поле уже были посвящены статьи полуобзорного характера во втором и пятом выпусках сборника «Вопросы теории плазмы» [1, 2]. Эти статьи были написаны еще в то время, когда реальность самого объекта, о равновесии которого шла речь, — высокотемпературной плазмы — не была вполне очевидной. За прошедшие годы в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу произошли значительные изменения. Большое распространение получили тороидальные установки токамак, в которых удается создавать плазму с параметрами, приближающимися к необходимым для термоядерного реактора [3]. Соответственно значительно расширился круг лиц, которым необходимо знание основ теории удержания плазмы в токамаке и, в частности, одного из элементов ее — теории равновесия. Цель настоящей статьи — изложить основную информацию по теории равновесия, накопленную к настоящему времени и необходимую в первую очередь научным работникам, занимающимся исследованиями на токамаках.

## ГЛАВА 1

### УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Основой теории равновесия плазмы в магнитном поле служит следующая простая система векторных уравнений:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]; \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (1.2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $p(\mathbf{r})$  — давление нагретой плазмы;  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  — плотность электрического тока и напряженность магнитного поля. Первое уравнение выражает тот факт, что в равновесии объемная сила  $\mathbf{F}_p = -\nabla p$ , приходящаяся на единичный элемент объема и направленная из центра

к границе плазмы, уравнивается во всем объеме, занятом плазмой, силой Ампера  $\frac{1}{c} [j \mathbf{B}]$ .

Следует отметить, что сугубо «гидродинамический» вид уравнения равновесия является иногда причиной ошибочного представления об условиях его применимости. В некоторых статьях пишут, например, что система (1.1)—(1.3) — это система уравнений идеальной магнитной гидродинамики. В расшифровке это утверждение означает, что будто бы система уравнений (1.1)—(1.3) даже при большой частоте столкновений частиц плазмы не допускает диссипативного расширения (диффузии плазмы). Иногда считают, что уравнение (1.1), во всяком случае, неприменимо в области редких столкновений, когда длина свободного пробега частиц превышает длину тора, т. е. в области, где существенны эффекты неоклассической теории переносов, развитой А. А. Галеевым и Р. З. Сагдеевым [4]. Ошибочное мнение о необходимости введения поправочного множителя типа  $1 - \alpha\sqrt{\varepsilon}$  ( $\varepsilon = a/R$  — обратное аспектное отношение плазменного тора,  $\alpha \sim 1,5 \div 2$  — численный коэффициент, зависящий от отношения электронной и ионной температур), связанного с наличием запертых частиц, в одно из интегральных следствий уравнения равновесия в случае редких столкновений частиц плазмы попало, к сожалению, и в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 7, с. 239.

В связи с этим представляется необходимым предпослать изложению результатов теории равновесия обоснование применимости уравнения (1.1) для описания неидеальной плазмы. Фактически такое обоснование содержится в ряде работ по неоклассическому транспорту (см., например, очень содержательный обзор Хинтона и Хазелтина [5]), поэтому для некоторых читателей оно может показаться и излишним. Однако, учитывая практическую важность следствий, вытекающих из уравнения равновесия, мы полагаем полезным посвятить его обоснованию несколько страниц настоящего обзора. Забегая вперед, скажем, что для применимости уравнения (1.1) достаточно выполнения следующих условий:

1. Кинетическая энергия направленного движения плазмы меньше тепловой энергии:

$$\rho v^2 \ll p. \quad (1.4)$$

Это условие сказалось в пренебрежении инерцией. Дрейфовые и диффузионные движения плазмы, поскольку их скорость меньше тепловой, допускаются, они не противоречат уравнению (1.1).

2. Газокинетическое давление частиц плазмы должно быть близким к изотропному. Отклонение от изотропии, безусловно, мало в гидродинамическом пределе, когда длина свободного пробега заряженной частицы вдоль магнитной силовой линии значительно меньше длины системы  $\lambda \ll L$ . Но и в высокотемпературной разреженной плазме даже при выполнении обратного условия,  $\lambda \gg L$ , функция распределения частиц по скоростям релаксирует к изотропной максвелловской функции при условии, что путь, пробегаемый частицей за характерное

время изменения макроскопических параметров плазмы  $t$ , достаточно велик,  $v_T t \gg \lambda$ . Благодаря замкнутости тороидальной системы (магнитная силовая линия не выходит из объема, занимаемого плазмой) это условие может выполняться.

Итак, второе необходимое условие применимости уравнения (1.1) — сравнительная медленность макроскопических процессов:

$$t \gg \tau_{ee}, \tau_{ii}, \quad (1.5)$$

где  $\tau_{ee}$  и  $\tau_{ii}$  — времена электрон-электронных и ион-ионных столкновений.

3. Из-за конечности ларморовского радиуса заряженных частиц  $r_{\perp}(v)$  локальная максвелловская функция распределения неоднородной плазмы даже в цилиндрической геометрии оказывается искаженной на величину  $\delta f \sim r_{\perp} f'(r)$ , где  $r$  — радиус сечения тороидальной магнитной поверхности. Это приводит к отклонению от изотропного давления  $\delta p \sim p r_{\perp}/r$ . В тороидальной геометрии отклонение несколько больше, так как здесь заряженные частицы дрейфуют с магнитной поверхности на разные расстояния масштаба  $\Delta(v) \approx r_{\perp} q$  для пролетных и  $\Delta(v) = r_{\perp} q e^{-1/2}$  для запертых частиц. Здесь  $q$  — «число вращения» магнитной силовой линии («запас устойчивости» в токамаке). Это приводит к относительному отклонению распределения по скоростям от локального максвелловского распределения  $\delta f/f \approx \Delta(v)/a$ . Связанная с этим отклонением степень анизотропии газокINETического давления плазмы  $\delta p \sim p r_{\perp} q/a$ . Таким образом, для применимости уравнения равновесия (1.1) необходимо выполнение условия малости ларморовского радиуса частиц:

$$r_{\perp}/a \ll 1, \quad r_{\perp} q/a \ll 1. \quad (1.6)$$

Теперь мы приведем вывод уравнения равновесия (1.1), поясняющий, почему даже в разреженной плазме оно имеет гидродинамический вид.

Воспользуемся наглядным представлением о движении заряженных частиц в магнитном поле. При выполнении условия (1.6) плазму можно рассматривать как газ «ларморовских кружков», образованных вращением заряженных частиц по ларморовской окружности.

Ларморовские кружки движутся хаотически с «тепловыми» скоростями вдоль магнитных силовых линий и совершают медленное дрейфовое движение поперек магнитного поля  $\mathbf{V}$ . Поэтому с точки зрения газокINETической теории это газ с одномерным хаотическим движением (вдоль магнитных силовых линий). Соответственно ларморовские кружочки создают только продольное давление. Поэтому для описания плазмы как целого нужно иметь только одномерное силовое уравнение — равновесие газа вдоль  $\mathbf{V}$ . Оно должно быть дополнено уравнением Максвелла (1.2), в котором плотность тока должна быть выражена через параметры плазмы. Выведем сначала это выражение, а затем составим одномерное уравнение равновесия.

Пусть  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — параллельная и перпендикулярная вектору  $\mathbf{V}$  составляющие вектора скорости  $\mathbf{v}$  частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$ , а



$\mathbf{v}_d$  — скорость движения центра ларморовского кружка. По аналогии с выражением для средней плотности электрического тока в электродинамике сплошных сред плотность потока частиц данного сорта (т. е. с одними и теми же зарядом  $e$  и массой  $m$ ) можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых представляет перенос ларморовских кружков, а другое — «обтекающий» поток:

$$\mathbf{\Gamma} \equiv n \langle \mathbf{v} \rangle = n \langle \mathbf{v}_d \rangle + \text{rot } \mathbf{K}; \quad (1.7)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} n \langle [\mathbf{r}\mathbf{v}] \rangle. \quad (1.8)$$

Здесь  $n$  — плотность частиц данного сорта;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы, угловые скобки означают усреднение по распределению скоростей. Вектор  $\mathbf{K}$  можно назвать плотностью *кинематического момента*. Очевидно, что момент количества движения рассматриваемых частиц в единице объема равен  $2m\mathbf{K}$ , а магнитный

$$\mathbf{M} = \frac{e}{c} \mathbf{K}. \quad (1.9)$$

Отметим, что обтекающий поток  $\text{rot } \mathbf{K}$  выпадает из уравнения непрерывности

$$\partial n / \partial t + \text{div } \mathbf{\Gamma} = 0 \quad (1.10)$$

в силу тождества  $\text{div } \text{rot} = 0$ . Таким образом, изменение плотности связано только с потоком ларморовских кружков.

Найдем явные выражения для составляющих потока  $\mathbf{\Gamma}$ .

Скорость движения центра ларморовского кружка определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_d = & v_{\parallel} \mathbf{B}/B + \frac{c}{|\mathbf{B}|^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \frac{c}{e|\mathbf{B}|^2} [\mathbf{R}_1 \mathbf{B}] + \\ & + \frac{mc(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{4e|\mathbf{B}|^4} [\mathbf{B}\nabla|\mathbf{B}|^2] + \frac{mcv_{\parallel}^2}{e|\mathbf{B}|^4} [\mathbf{B}[\text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}]]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — электрическое поле, а  $\mathbf{R}_1$  — средняя сила трения, действующая на заряженную частицу. Введем продольное и поперечное давления частиц данного сорта

$$p_{\parallel} = mn \langle v_{\parallel}^2 \rangle, \quad p_{\perp} = \frac{1}{2} mn \langle v_{\perp}^2 \rangle, \quad (1.12)$$

тогда

$$\begin{aligned} n \langle \mathbf{v}_d \rangle = & n \langle v_{\parallel} \rangle \mathbf{B}/B + \frac{cn}{|\mathbf{B}|^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \frac{cn}{e|\mathbf{B}|^2} [\mathbf{R}_1 \mathbf{B}] + \\ & + \frac{c(p_{\parallel} + p_{\perp})}{2e|\mathbf{B}|^4} [\mathbf{B}\nabla|\mathbf{B}|^2] + \frac{4\pi p_{\parallel}}{e|\mathbf{B}|^2} \mathbf{j}_{\perp}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В соответствии с уравнением

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.14)$$

мы для краткости выразили третье слагаемое через поперечную к вектору  $\mathbf{B}$  составляющую плотности электрического тока  $\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \mathbf{B} (\mathbf{j}\mathbf{B})/|\mathbf{B}|^2$ .

Вычислим теперь производный кинематический момент одного ларморовского кружочка  $\mathbf{K}_\perp = \frac{1}{2} [\mathbf{r}\mathbf{v}]$ . Здесь под  $\mathbf{v}$  следует понимать только поперечную составляющую скорости (поскольку продольное движение явно учтено в выражении для  $\mathbf{v}_d$ ), а в качестве  $\mathbf{r}$  можно взять радиус-вектор  $\mathbf{r}_\perp$  с началом в центре ларморовского кружочка. Тогда [6]

$$\mathbf{v}_\perp = [\omega \mathbf{r}_\perp], \quad \omega = -e\mathbf{B}/mc \quad (1.15)$$

и  $K_\perp = r_\perp^2 \omega/2$ . Производя усреднение, получаем

$$\mathbf{K} = -\frac{cp_\perp}{e|\mathbf{B}|^2} \mathbf{B}; \quad (1.16)$$

$$\text{rot } \mathbf{K} = \frac{c|\mathbf{B}\nabla\rho|}{e|\mathbf{B}|^2} - \frac{cp_\perp}{e|\mathbf{B}|^4} [\mathbf{B}\nabla|\mathbf{B}|^2] - \frac{4\pi p_\perp}{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{j}. \quad (1.17)$$

Складывая выражения (1.13) и (1.17), находим плотность потока частиц данного сорта:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} = & n \langle v_{||} \rangle \mathbf{B}/B + \frac{cn}{|\mathbf{B}|^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \frac{cn}{e|\mathbf{B}|^2} [\mathbf{R}_\perp \mathbf{B}] + \frac{c|\mathbf{B}\nabla\rho|}{e|\mathbf{B}|^2} + \\ & + \frac{c(p_{||} - p_\perp)}{2e|\mathbf{B}|^4} [\mathbf{B}\nabla|\mathbf{B}|^2] + \frac{4\pi}{e|\mathbf{B}|^2} (p_{||} - p_\perp) \mathbf{j}_\perp - \frac{4\pi p_\perp}{e|\mathbf{B}|^2} \mathbf{j}_{||}. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Наличие в тороидальной системе запертых частиц не меняет этого общего выражения. Действительно, выражение (1.18) учитывает полностью движение ларморовских кружков как вдоль вектора  $\mathbf{B}$ , так и в поперечном направлении. Поэтому на языке ларморовских кружков связанный с запертными частицами «банановый» ток учтен первым членом выражения для  $\mathbf{\Gamma}$  и добавлять его к (1.18) не нужно. Если бы мы рассматривали плазму как смесь газов ларморовских кружков и «бананов», то формула (1.18) представляла бы поток только пролетных частиц. Поток, связанный с запертными частицами, определился бы формулой типа (1.7), где первый член означал бы поток центров «бананов», а  $\mathbf{K}$  — их кинематический момент, включающий в себя кроме кинематического момента ларморовских кружочков также и кинематический момент собственно банана, который привел бы к вкладу в составляющую  $\mathbf{\Gamma}_{||}$ . В выражении (1.18), ток, связанный с запертными частицами, учитывается через функцию распределения при усреднении первого слагаемого. Неоклассический эффект содержится в пятом слагаемом. Он связан с анизотропией давления,  $p_{||} - p_\perp \neq 0$ .

Теперь мы можем записать выражение для плотности тока

$$\mathbf{j} = \Sigma e\mathbf{\Gamma}. \quad (1.19)$$

Здесь суммирование производится по сортам зарядов. При суммировании следует учесть, что сила трения — внутренняя сила и что в плаз-

ме выполняется условие квазинейтральности, т. е. что электрическое взаимодействие между зарядами — также внутренняя сила:

$$\Sigma n \mathbf{R}_1 = 0, \quad \Sigma en \mathbf{E} = \mathbf{E} \Sigma en = 0. \quad (1.20)$$

Обозначая в данном разделе суммарное давление плазмы  $P$

$$P_{\perp} = \Sigma p_{\perp}, \quad P_{\parallel} = \Sigma p_{\parallel}, \quad (1.21)$$

получаем

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}; \quad (1.22)$$

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}}{B} \frac{\Sigma en \langle v_{\parallel} \rangle}{1 + 4\pi P_{\perp} / |\mathbf{B}|^2}; \quad (1.23)$$

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c [\mathbf{B} \nabla P_{\perp}] / |\mathbf{B}|^2 + c (P_{\parallel} - P_{\perp}) [\mathbf{B} \nabla |\mathbf{B}|^2] / 2 |\mathbf{B}|^4}{1 - 4\pi (P_{\parallel} - P_{\perp}) / |\mathbf{B}|^2}. \quad (1.24)$$

Перейдем к выводу одномерного уравнения равновесия газа ларморовских кружков. Ларморовские кружки движутся внутри магнитной силовой трубки. Поэтому достаточно рассмотреть условия равновесия газа в отрезке такой трубки с длиной  $dl$ , объемом  $dV$ , магнитным потоком  $d\Phi$  и площадями сечений  $dS_1 = d\Phi/B_1$ ,  $dS_2 = d\Phi/B_2$ . Разность давлений, действующих со стороны окружающего газа на концы трубки,

$$(p_{\parallel} dS)_2 - (p_{\parallel} dS)_1 = d\Phi dl \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{p_{\parallel}}{B} \right) = dVB \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{p_{\parallel}}{B} \right) \quad (1.25)$$

должна уравновеситься объемной силой:

$$\dot{n} (R_{1\parallel} + eE_{\parallel} + \langle M_1 \rangle \nabla B) dV = (nR_{1\parallel} + enE_{\parallel} - p_{\perp} \partial B / B \partial l) dV. \quad (1.26)$$

Здесь  $M_1 = -mv_{\perp}^2 \mathbf{B} / 2B$  — магнитный момент одного кружочка. Приравнявая эти силы, получаем для частиц данного сорта

$$-\nabla_{\parallel} p_{\parallel} + \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B} \nabla_{\parallel} B + enE_{\parallel} + nR_{1\parallel} = 0 \quad (1.27)$$

и для всей плазмы

$$-\nabla_{\parallel} P_{\parallel} + \frac{P_{\parallel} - P_{\perp}}{B} \nabla_{\parallel} B = 0. \quad (1.28)$$

Система уравнений (1.24), (1.28) эквивалентна условию равновесия проводящей жидкости с анизотропным тензором давления  $P_{\alpha\beta} = P_{\parallel} B_{\alpha} B_{\beta} / |\mathbf{B}|^2 + P_{\perp} (\delta_{\alpha\beta} - B_{\alpha} B_{\beta} / |\mathbf{B}|^2)$  (см., например, [1, 7—10]).

При  $P_{\parallel} = P_{\perp} = P$  из (1.28), (1.22), (1.24) следует

$$\mathbf{B} \nabla P = 0; \quad (1.29)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + c \frac{[\mathbf{B} \nabla P]}{|\mathbf{B}|^2}, \quad (1.30)$$

что эквивалентно уравнению равновесия (1.1).

Пусть теперь имеется небольшая анизотропия давления

$$(P_{\parallel} - P_{\perp})/P_{\perp} = \delta, \quad (1.31)$$

тогда максимальные поправки к  $\mathbf{j}_{\perp} = c [\nabla P]/|B|^2$  в торе, как видно из (1.24), будут порядка  $\delta \Delta B/B \sim \delta \epsilon$ , т. е. практически пренебрежимо малыми. Точно так же мало пятое слагаемое в потоке частиц одного сорта  $\Gamma$  (1.18) по сравнению с четвертым, представляющим дрейфовый поток частиц вдоль магнитных поверхностей. Оно может быть не малым по сравнению с нормальной к магнитным поверхностям составляющей второго и третьего слагаемых в  $\Gamma$ , представляющей перенос (диффузию) частиц в радиальном направлении, поскольку эта составляющая потока в  $\omega t$  раз меньше дрейфовой. В этом и состоит смысл учета в  $\Gamma$  «неоклассического» эффекта анизотропии давления в области редких столкновений. Неоклассический эффект необходимо также учитывать в законе Ома, связывающем  $\mathbf{j}_{\parallel}$  с электрическим полем. Эта связь получается из уравнения равновесия (1.27), где  $\mathbf{j}_{\parallel}$  входит через  $\mathbf{R}_{1\parallel}$ . При умножении (1.27) на  $\mathbf{B}$  и усреднении по магнитному слою получается

$$n \langle (e\mathbf{E} + \mathbf{R}_1) \mathbf{B} \rangle_B + \left\langle \frac{P_{\parallel} - P_{\perp}}{2|B|^2} \mathbf{B} \nabla |B|^2 \right\rangle_B = 0. \quad (1.32)$$

Здесь угловые скобки с индексом  $B$  означают усреднение по объему слоя между близкими тороидальными магнитными поверхностями. Соотношения (1.18), (1.32) совпадают с уравнениями, которые получаются из уравнений для моментов функций распределения [5, 11]. Отметим, что несмотря на кажущуюся независимость геометрических коэффициентов  $\nabla_{\perp} \ln B$  и  $\nabla_{\parallel} \ln B$ , входящих в неоклассические слагаемые в формулах (1.18) и (1.32), при наличии осевой или винтовой симметрии они связаны, так как обе производные выражаются через одну и ту же производную по полоидальной координате.

Тот факт, что в выражении для  $\mathbf{j}_{\parallel}$  в качестве источника тока кроме электрического поля появляется дополнительное слагаемое (ток Галеева—Сагдеева, или «бутстрэп»-ток), связанное с запертыми частицами, не меняет вида уравнения равновесия (1.1), поскольку в него не входит  $\mathbf{j}_{\parallel}$ . В частности, не меняется используемая в эксперименте связь диамагнитного сигнала с давлением плазмы.

Итак, мы видим, что уравнения равновесия (1.1)—(1.3) представляют собой не модель идеальной магнитной гидродинамики, а макроскопические уравнения для описания реальной плазмы в сильном магнитном поле,  $r_{\perp}/a \ll 1$  (условие применимости дрейфового приближения, лежащего в основе вывода), с медленно меняющимися макроскопическими параметрами,  $t \gg \tau_{ee}, \tau_{ii}$  (условие малости анизотропии давления) при отсутствии движений со скоростями, масштаба скорости звука (пренебрежение инерционным дрейфом в уравнениях дрейфового приближения).

В этих условиях уравнения (1.1)—(1.3) описывают как бы каркас равновесной плазменной конфигурации, в котором могут развиваться различные процессы типа дрейфовых движений, диффузии, колебаний

и т. п., не искажающие этого каркаса. Уравнения равновесия плазмы не чувствительны к ряду внутренних процессов, потому что они отражают общий закон сохранения импульса макроскопической системы. Процессы, связанные с неидеальностью плазмы, не приводят к существенному изменению импульса системы, поэтому они и не влияют на вид уравнения равновесия плазмы.

## ГЛАВА 2

### ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАВНОВЕСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

#### § 2.1. Прямолинейный плазменный шнур круглого сечения

Простейшей по геометрии равновесной плазменной конфигурацией является прямолинейный плазменный шнур круглого сечения. Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \theta, s$ , ось которой совпадает с осью шнура. В силу цилиндрической симметрии ( $\partial/\partial\theta = 0, \partial/\partial s = 0$ ) из уравнения (1.3) следует, что  $B_\rho = 0$  и магнитное поле представлено только компонентами  $B_\theta$  и  $B_s$ . Уравнение (1.2) дает связь полоидальной  $B_\theta$  и продольной  $B_s$  компоненты поля с плотностью продольного тока  $j_s$  и полоидального тока  $j_\theta$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho B_\theta = \frac{4\pi}{c} j_s, \quad \frac{\partial B_s}{\partial \rho} = -\frac{4\pi}{c} j_\theta, \quad (2.1)$$

а (1.1) представляет собственно уравнение баланса давлений

$$dp/d\rho = \frac{1}{c} (j_\theta B_s - j_s B_\theta). \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что компенсация градиента давления осуществляется силой взаимодействия продольного тока с полоидальным полем и полоидального тока с продольным полем. Вне плазмы, там где  $\mathbf{j} = 0$ , полоидальное поле имеет вид

$$B_\theta(\rho) = B_\theta(\rho_0)\rho_0/\rho \quad (2.3)$$

( $\rho_0$  — радиус токового канала) и совпадает с полем прямолинейной нити с током, а продольное поле постоянно:

$$B_s = B_{se} = \text{const.} \quad (2.4)$$

В данной конфигурации полоидальное поле создается только током плазмы и отсутствуют какие-либо поля внешних источников. Продольное же поле  $B_{se}$  должно создаваться внешними обмотками.

При отсутствии полоидального поля конфигурация представляет так называемый  $\theta$ -пинч. В нем отсутствует продольный ток плазмы, а условие баланса давлений сводится к соотношению

$$p(\rho) + B_s^2(\rho)/8\pi = \text{const.} \quad (2.5)$$

При отсутствии же продольного поля конфигурация является z-пинчем, в котором плазма удерживается собственным током. Если проинтегрировать уравнение (2.2) при  $B_s = 0$  по сечению шнура, домножив его на  $\rho^2$  и заменив  $j_s$  выражением (2.1), то получится интегральное соотношение

$$2c^2 \int p dS / \mathcal{Y}^2 = 1, \quad (2.6)$$

где  $\mathcal{Y}$  — полный ток плазмы. Величина, стоящая в левой части (2.6), имеет инвариантный смысл и не зависит от выбора области интегрирования, лишь бы она включала в себя все сечение шнура. Важное значение она имеет и для тороидальных систем и обозначается  $\beta_{\mathcal{Y}}$ .

Системами, использующими для удержания как продольное поле, так и поле тока, являются стабилизированный пинч ( $B_\theta \approx B_s$ ) и токамак ( $B_s \gg B_\theta$ ). Уравнение баланса давлений в интегральной форме для шнура круглого сечения можно, используя ту же процедуру, что и для вывода (2.6), записать в виде [12]

$$8\pi \langle p \rangle = \frac{4\mathcal{Y}^2}{c^2 \rho_0^2} + B_{se}^2 - \langle B_s^2 \rangle, \quad (2.7)$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по сечению шнура. Обозначив инвариантную величину

$$\mu_{\mathcal{Y}} = \frac{c^2 \int [B_{se}^2 - B_s^2(\rho)] dS}{4\pi \mathcal{Y}^2}, \quad (2.8)$$

характеризующую диамагнетизм, получаем из (2.7) соотношение для интегральных характеристик  $\beta_{\mathcal{Y}}$ ,  $\mu_{\mathcal{Y}}$

$$\beta_{\mathcal{Y}} = 1 + \mu_{\mathcal{Y}}, \quad (2.9)$$

справедливое для шнура круглого сечения.

В рассмотренной конфигурации равновесие определяется распределениями двух величин по радиусу. В системах с продольным полем в качестве исходных выступают распределения давления  $p(\rho)$  и продольного тока  $j_s(\rho)$  по радиусу, которые связаны с процессами переноса в плазме. Полоидальный ток  $j_\theta$  возбуждается за счет диффузии плазмы поперек магнитного поля как раз таким, чтобы обеспечить баланс давлений (2.2). Зная связь диффузионного движения плазмы с  $j_\theta$ , из (2.2) можно определить скорость диффузии. Таким образом, в системах с продольным полем баланс давлений устанавливается сам собой за счет подстройки тока  $j_\theta$  и собственно проблема равновесия по малому радиусу снимается. Уравнение же (2.2) или (2.9) используется в целях диагностики, при этом в зависимости от  $\beta_{\mathcal{Y}}$  плазма может быть либо парамагнитной ( $\beta_{\mathcal{Y}} < 1$ ,  $\mu_{\mathcal{Y}} < 0$ ,  $\langle B_s^2 \rangle > B_{se}^2$ ), либо при увеличении давления становится диамагнитной ( $\beta_{\mathcal{Y}} > 1$ ,  $\mu_{\mathcal{Y}} > 0$ ,  $\langle B_s^2 \rangle < B_{se}^2$ ).

В системах типа  $z$ - и  $\theta$ -пинчей в соотношениях равновесия (2.6) и (2.5) нет свободного параметра. Именно по этой причине условия равновесия могут не выполняться, и существенную роль в образовании шнура играют инерционные процессы, обуславливая импульсный характер этих систем.

## § 2.2. Осесимметричные конфигурации

Осесимметричные конфигурации в настоящее время имеют наибольшее значение, так как представляют простейшие замкнутые конфигурации. В данном параграфе мы приведем основные соотношения без детального анализа условий равновесия.

Обозначим цилиндрические координаты  $r, \xi, z$ . Иногда вместо азимутального угла  $\xi$  будет использоваться продольная координата  $s = r\xi$ . В частности, продольные компоненты векторов будут отмечаться индексом  $s$ .

Магнитное поле и плотность тока в плазме представляют сумму полоидальной и тороидальной компонент:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_s, \quad \mathbf{V}_p = V_r \mathbf{e}_r + V_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{V}_s = V_s \mathbf{e}_s; \quad (2.10)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_p = j_r \mathbf{e}_r + j_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{j}_s = j_s \mathbf{e}_s. \quad (2.11)$$

Из условий  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  и симметрии конфигурации ( $\partial/\partial s = 0$ ) следует, что полоидальные компоненты поля и тока выражаются через скалярные функции  $\Psi(r, z)$  и  $F(r, z)$ :

$$\mathbf{V}_p = \frac{1}{2\pi r} [\nabla \Psi \mathbf{e}_s], \quad V_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{j}_p = \frac{1}{2\pi r} [\nabla F \mathbf{e}_s], \quad j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial F}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial F}{\partial r}. \quad (2.13)$$

Функция потока  $\Psi(r, z)$  и функция тока  $F(r, z)$  определены с точностью до аддитивных констант, которыми можно распорядиться так чтобы  $\Psi$  и  $F$  представляли полный поток и ток, пронизывающие кольцевой контур  $r = \text{const}, z = \text{const}$ , и были связаны с циркуляциями векторного потенциала  $A$  и магнитного поля  $B$  по этому контуру:

$$\Psi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}_s = 2\pi r A_s; \quad (2.14)$$

$$\frac{4\pi}{c} F = \oint \mathbf{B} d\mathbf{l}_s = 2\pi r B_s. \quad (2.15)$$

При таком определении  $\Psi, F$  функция  $\Psi$  включает в себя, в частности, поток индуктора, служащего для поддержания продольного тока в плазменном шнуре и не влияющего непосредственно на равновесие, а  $F$  включает в себя полный ток катушек, создающих продольное поле (рис. 1). Такое определение удобно для описания электротехники си-

стем, так как продольное электрическое поле  $E_s$  оказывается непосредственно связанным с  $\Psi$ :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (2.16)$$

$$2\pi r E_s = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Часто пользуются определениями, в которых полоидальные поток и ток отсчитываются от магнитной оси:

$$\chi(r, z) = \Psi(r_0, z_0) - \Psi(r, z); \quad (2.18)$$

$$I(r, z) = F(r_0, z_0) - F(r, z), \quad (2.19)$$

где  $r_0, z_0$  — координаты магнитной оси. Поток  $\chi$  и ток  $I$  удобно использовать, если рассматривается только область внутри плазменного шнура, как, например, в задачах устойчивости.

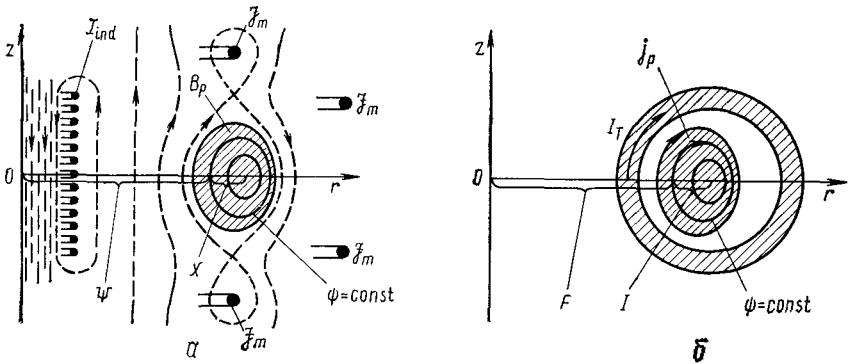


Рис. 1 Отсчет полоидальных потоков  $\Psi, \chi$  и полоидальных токов  $F, I$  в равновесной конфигурации:

а —  $\Psi$  — поток между осью симметрии и магнитной поверхностью, включающий поток индуктора с током  $I_{\text{ind}}$ , внешнюю часть магнитного потока плазмы и витков равновесия с токами  $I_m$ ;  $\chi$  — поток между магнитной осью и поверхностью; б —  $F$  — полоидальный ток между осью симметрии и магнитной поверхностью, включающий в себя ток  $I_T$  катушек продольного поля;  $I$  — полоидальный ток в плазме между магнитной осью и поверхностью

Пока в этом параграфе использовались только условия симметрии. Если учесть уравнение равновесия, то первыми двумя следствиями его будет то, что магнитные  $\Psi(r, z) = \text{const}$  и токовые  $F(r, z) = \text{const}$  поверхности совпадают и представляют собой поверхности равного давления:  $p(r, z) = \text{const}$ . Это вытекает из соотношений  $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ ,  $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$ , являющихся следствием уравнения (1.1), поэтому можно считать  $p = p(\Psi)$ ,  $F = F(\Psi)$ . Третьим следствием уравнения равновесия является связь плотности продольного тока  $j_s$  в равновесной конфигурации с функциями  $p(\Psi)$ ,  $F(\Psi)$ :

$$j_s = 2\pi r \left( c \frac{dp}{d\Psi} + \frac{4\pi}{c} \frac{F}{4\pi^2 r^2} \frac{dF}{d\Psi} \right). \quad (2.20)$$



Таким образом, условия равновесия просто ограничивают возможные распределения плотности тока  $j_s$  в плазме и вместо двумерного  $j_s(r, z)$  фактически дают одномерное распределение, зависящее от двух функций:  $p'(\Psi)$  и  $FF'(\Psi)$ . Это ограничение может использоваться, как будет видно в дальнейшем, для целей диагностики.

Имея распределение плотности тока  $j_s$ , можно написать уравнение для функции  $\Psi = 2\pi r A_s$  [13—16]

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi = r^2 \operatorname{div} \frac{\nabla \Psi}{r^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{c} r j_s = \\ &= -4\pi^2 \frac{4\pi}{c} \left( cr^2 p' + \frac{4\pi}{c} \frac{FF'}{4\pi^2} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Множители  $4\pi/c$  и  $c$  выделены здесь для удобства перехода к другим системам единиц.

Уравнение (2.21), определяющее равновесную конфигурацию, является просто уравнением магнитостатики с нелинейным распределением продольного тока.

Вне плазмы, где отсутствуют давление,  $p = 0$ , и полоидальные токи,  $F' = 0$ , правая часть в (2.21) обращается в нуль. При решении задач равновесия удобно разделять область, занятую плазмой, и внешнюю область вакуумных магнитных полей. Граничными условиями, связывающими эти области, являются постоянство  $\Psi(r, z)$  на границе плазмы  $\Gamma$ :

$$\Psi_i(r, z)|_{\Gamma} = \Psi_e(r, z)|_{\Gamma} \quad (2.22)$$

и условие баланса давления на границе шнура:

$$(8\pi p_i + B_i^2)|_{\Gamma} = (B_e^2)|_{\Gamma} \quad (2.23)$$

или

$$\left\{ 8\pi p_i + \left( \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)^2 + B_{si}^2 \right\}_{\Gamma} = \left\{ \left( \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)^2 + B_{se}^2 \right\}_{\Gamma}. \quad (2.24)$$

Индексы  $i, e$  относятся соответственно к внутренней и внешней сторонам границы шнура. Условие баланса давлений в форме (2.24) допускает существование поверхностного тока на границе шнура. При его отсутствии (2.24) заменяется просто непрерывностью производных функции потока

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (2.25)$$

Приведем здесь же общие формулы для прямолинейного шнура, который можно рассматривать как предел осесимметричной конфигурации при  $R \rightarrow \infty$  ( $R = r - x$ ). Вместо функций  $\Psi$  и  $F$  удобно пользоваться непосредственно продольными компонентами векторного потенциала  $A_s$  и магнитного поля  $B_s$ , которые являются поверхностны-

ми функциями:  $p = p(A_s)$ ,  $B_s = B_s(A_s)$ . Для прямолинейной конфигурации имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_s = [\nabla A_s \mathbf{e}_s] + B_s \mathbf{e}_s, \quad B_x = \frac{\partial A_s}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_s}{\partial x}; \quad (2.26)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} [\nabla B_s \mathbf{e}_s] + j_s \mathbf{e}_s, \quad \frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial B_s}{\partial y}, \\ \frac{4\pi}{c} j_y = -\frac{\partial B_s}{\partial x}; \quad (2.27)$$

а для плотности продольного тока, как следствие уравнения равновесия, выражение

$$j_s = c \frac{d}{dA_s} \left( p + \frac{B_s^2}{8\pi} \right). \quad (2.28)$$

Вместо тороидального уравнения (2.21), определяющего геометрию конфигурации, будем иметь

$$\Delta A_s = \frac{\partial^2 A_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_s}{\partial y^2} = -\frac{4\pi}{c} j_s(A_s) = -4\pi p'(A_s) - B_s B_s'(A_s). \quad (2.29)$$

Важной характеристикой равновесной конфигурации, от которой в значительной степени зависит ее устойчивость, является величина вращательного преобразования  $\mu(\Psi) = \iota/2\pi$  ( $\iota$  — угол вращательного преобразования) или обратная величина  $q(\Psi) = 1/\mu(\Psi)$ , называемая запасом устойчивости. Для осесимметричной конфигурации

$$q = \oint \frac{B_s dl}{2\pi r B_p} = \frac{2F(\Psi)}{2\pi c} \oint \frac{dl_p}{r^2 B_p}. \quad (2.30)$$

Для прямолинейного шнура

$$q = \frac{B_s}{2\pi R} \oint \frac{dl_p}{B_p}, \quad (2.31)$$

где  $R$  — большой радиус эквивалентного тора.

Интегрирование в (2.30), (2.31) ведется по контуру сечения магнитной поверхности.

Отметим, что в уравнения (2.21), (2.29) продольное поле, от которого зависит  $q$ , входит только через производные  $dF^2/d\Psi$  либо  $dB_s^2/dA_s$ . Поэтому одна и та же конфигурация представляет целый класс равновесий с различными величинами продольного поля, но с фиксированными производными  $dF^2/d\Psi$  либо  $dB_s^2/dA_s$ . Этим свойством, позволяющим менять параметр  $q$  без дополнительных расчетов равновесия, пользуются при численном исследовании устойчивости [17].

Важное отличие тороидального равновесия от прямолинейного — невозможность осуществления первого без продольного тока. Как следует из (2.20), плотность тока  $j_s$  не может быть всюду равна нулю из-за дополнительной зависимости от большого радиуса  $r$ . Причиной этого является баллонный эффект: суммарная сила, связанная с давлением

плазмы, направлена в сторону увеличения большого радиуса из-за разницы в величинах внешней (удаленной от оси симметрии) и внутренней (ближайшей к оси) поверхности тора. Другой причиной является направленная по большому радиусу сила, действующая на полоидальные токи в тороидальном магнитном поле. Компенсироваться эти силы должны в результате взаимодействия продольного тока с полоидальным полем.

Следствием уравнения равновесия является также невозможность тороидального равновесия при отсутствии полного тока в плазменном шнуре:  $\mathcal{Y} = 0$ . Для конфигурации с одной магнитной осью этот факт очевиден, так как при  $\mathcal{Y} = 0$  полоидальное поле на поверхности плазмы меняло бы знак, а это несовместимо с замкнутостью магнитных поверхностей внутри плазмы. Это дает основание сделать вывод, что для тора существуют критические величины  $\beta_{\mathcal{Y}, cr}$  и  $\mu_{\mathcal{Y}, cr}$ , которые нельзя превзойти. Эффект тороидальности в (2.20) входит уже в первом порядке, если использовать разложение по кривизне. Поэтому максимально достижимые  $\beta_{\mathcal{Y}, cr}$  и  $\mu_{\mathcal{Y}, cr}$  должны быть масштаба аспектного отношения:

$$\beta_{\mathcal{Y}, cr} \approx R/a, \quad \mu_{\mathcal{Y}, cr} \approx R/a, \quad (2.32)$$

где  $R, a$  — характерные большой и малый радиусы конфигурации.

### § 2.3. Конфигурации с винтовой симметрией

При наличии винтовой симметрии все физические величины, характеризующие конфигурацию, зависят только от двух переменных:  $\rho, \theta = \omega - \kappa s$ , где  $\rho, \omega, s$  — цилиндрические координаты, связанные с осью системы. Параметр  $\kappa$  определяет продольный период системы  $L = 2\pi/\kappa$ . Как и у всякой периодической системы, в качестве периода может выступать любая длина, кратная наименьшему периоду. Физически определенным период становится тогда, когда система изгибается в тор и становится замкнутой. Часто такую систему можно рассматривать как обладающую винтовой симметрией, а эффекты тороидальности учитывать как поправки. Периметр  $2\pi R$  эквивалентного тора равен целому числу  $n$  минимальных периодов. В сечении  $s = \text{const}$  также можно указать минимальный период по углу  $\theta$ , равный  $2\pi/m$  ( $m$  — целое число, определяющее «заходность» конфигурации). Беря за основу представление об эквивалентном торе, можно характеризовать винтовую симметрию радиусом  $R$  и целыми числами  $m, n$ , тогда параметр  $\kappa$  будет равен:

$$\kappa = 2\pi/L = n/mR. \quad (2.33)$$

При учете винтовой симметрии,

$$\kappa \partial / \partial \omega = -\partial / \partial s, \quad (2.34)$$

соотношения  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  позволяют, как и ранее, ввести функции потока  $\chi^*$  ( $\rho, \theta$ ) и тока  $I^*$  ( $\rho, \theta$ ). Их связь с компонентами

магнитного поля и плотности тока удобнее всего представить, введя следующие перенормированные «полоидальные» поля и токи [18—20]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}^* &\cong \mathbf{B}_\rho \mathbf{e}_\rho + (B_\omega - \kappa \rho B_s) \mathbf{e}_\omega; \\ \mathbf{j}^* &\equiv j_\rho \mathbf{e}_\rho + (j_\omega - \kappa \rho j_s) \mathbf{e}_\omega, \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

тогда

$$\mathbf{B}^* = [\mathbf{e}_s \nabla \chi^*], \quad \mathbf{j}^* = [\mathbf{e}_s \nabla I^*]. \quad (2.36)$$

При таком определении  $\chi^*(\rho, \theta)$ ,  $I^*(\rho, \theta)$  имеют смысл потока магнитного поля и тока через винтовую перегородку  $\theta = \omega - \kappa s = \text{const}$  между  $\rho = 0$  и текущим значением  $\rho$  на единичной длине по  $s$ . Можно также ввести ток  $F^*(\rho, \theta)$  через эту перегородку между  $\rho = \infty$  и текущим значением  $\rho$ , так что

$$I^*(\rho, \theta) = F^*(0, \theta) - F^*(\rho, \theta). \quad (2.37)$$

Поток магнитного поля  $\Psi^*$  между  $\rho = \infty$  и текущим значением  $\rho$  в системе с винтовой симметрией ввести, строго говоря, нельзя из-за его расходимости при  $\rho \rightarrow \infty$ . Однако при замыкании системы в тор такой поток уже приобретает смысл и им можно пользоваться, при этом

$$\chi^*(\rho, \theta) = \Psi^*(0, \theta) - \Psi^*(\rho, \theta). \quad (2.38)$$

Функции  $\Psi^*$ ,  $F^*$ ,  $p$  являются поверхностными функциями:  $p = p(\Psi^*)$ ,  $F = F(\Psi^*)$ . Таким образом, для конфигурации с винтовой симметрией имеем

$$\mathbf{B}^* = [\nabla \Psi^* \mathbf{e}_s], \quad B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta}, \quad B_\omega - \kappa \rho B_s = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho}; \quad (2.39)$$

$$\mathbf{j}^* = [\nabla F^* \mathbf{e}_s], \quad j_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^*}{\partial \theta}, \quad j_\omega - \kappa \rho j_s = -\frac{\partial F^*}{\partial \rho}; \quad (2.40)$$

$$A_s + \kappa \rho A_\omega = \Psi^*; \quad (2.41)$$

$$B_s + \kappa \rho B_\omega = \frac{4\pi}{c} F^*; \quad (2.42)$$

$$j_s + \kappa \rho j_\omega = c(1 + \kappa^2 \rho^2) \frac{dp}{d\Psi^*} + \frac{4\pi}{c} F^* \frac{dF^*}{d\Psi^*}. \quad (2.43)$$

Уравнение для функции  $\Psi^*(\rho, \theta)$ , определяющей магнитные поверхности  $\Psi^*(\rho, \theta) = \text{const}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho}{1 + \kappa^2 \rho^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} = -4\pi p' + \\ + \frac{4\pi}{c} \frac{2\kappa F^*}{(1 + \kappa^2 \rho^2)^2} - \left( \frac{4\pi}{c} \right)^2 \frac{F^* F'^*}{1 + \kappa^2 \rho^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

При наличии винтовой симметрии одним из наиболее важных случаев является предел длинноволновой конфигурации, когда  $\kappa a \ll 1$  ( $a$  — характерный малый радиус шнура). При дополнительном условии  $B_s > B_\omega$ ,  $B_\rho$ ,  $\beta = 8\pi \rho / B_s^2 \ll 1$ , все соотношения для винтовой

симметрии становятся эквивалентными соотношениям для конфигурации с трансляционной симметрией, у которой роль полоидальных полей  $\mathbf{V}_p$  и токов  $\mathbf{j}_p$  играют  $\mathbf{V}_p^*$ ,  $\mathbf{j}_p^*$ , а продольная плотность тока  $j_s$  заменена выражением  $j_s - j_B$ , где

$$j_B = 2\kappa F^* \approx \frac{c}{4\pi} 2\kappa B_s. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.44) переходит при этом в аналог (2.29):

$$\begin{aligned} \Delta \Psi^* &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} = -\frac{4\pi}{c} [j_s(\Psi^*) - j_B] = \\ &= -[4\pi \rho'(\Psi^*) + B_s B_s'(\Psi^*)] + 2\kappa B_s. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Принципиальное отличие состоит в том, что правая часть в (2.46) вне плазмы не обращается в нуль из-за наличия фиктивного тока  $j_B$ , выступающего в роли источника потока продольного поля через винтовую перегородку.

Оказывается, что такая аналогия длинноволновой и прямолинейной конфигурации сохраняется и для винтовых МГД-течений плазмы, где уже важна инерция [20]. При высокой проводимости плазмы и сильном продольном поле,  $B_s \gg B_p$ , появляется дополнительное условие  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , где  $\mathbf{v}$  — полоидальная скорость плазмы, так как течение не может сжать продольное поле.

Уравнение винтового равновесия (2.46) полезно с двух точек зрения: во-первых, оно описывает равновесные конфигурации стеллараторного типа в отсутствие продольного тока, во-вторых, оно удобно для исследования последствий развития винтовых неустойчивостей в системах типа токамак.

## § 2.4. Квазицилиндрическое описание равновесия плазмы

В любой равновесной конфигурации магнитные и токовые поверхности являются поверхностями равного давления, так как  $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ ,  $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$ . В силу общих свойств векторных полей такие поверхности при условии их ограниченности в пространстве образуют семейство вложенных торов. Самая внутренняя тороидальная поверхность вырождается в замкнутую линию — магнитную ось.

В конфигурации может быть несколько магнитных осей, вокруг которых образованы собственные системы вложенных поверхностей. Эти области разделяются сепаратрисными поверхностями и в совокупности могут дать довольно запутанную конфигурацию. Для удержания плазмы желательно иметь конфигурацию с минимальным числом магнитных осей, так как выравнивание давления и температуры вдоль сепаратрисы приводит к увеличению эффективного поперечного выноса энергии из плазмы.

Вывод о том, что любая равновесная конфигурация состоит из семейств вложенных торов, позволяет описывать равновесие для каждого такого семейства в терминах, которые использовались для симмет-

ричных конфигураций или даже для прямолинейного шнура круглого сечения. Прежде чем переходить к такому описанию, сделаем общее замечание о равновесии в несимметричных системах.

При наличии симметрии топология конфигурации не была связана с условиями равновесия и определялась просто соленоидальностью магнитного поля, что позволяло ввести функцию потока  $\Psi$ , которая и давала тороидальные магнитные поверхности. В общем случае о наличии тороидальных поверхностей можно говорить, только если заранее известно, что уравнения равновесия выполнены. Сам же вопрос о том, будет ли в заданном несимметричном поле обеспечено равновесие, остается открытым. Для решения этого вопроса используются два подхода. Один основан на том, что даже для вакуумного магнитного поля вокруг замкнутых силовых линий может быть образована система вложенных магнитных поверхностей, на чем основана идея стелларатора. Здесь проблема состоит в том, как наличие плазмы конечного давления влияет на эту систему и при каком давлении равновесие становится невозможным. Другой подход состоит в изучении влияния несимметричных возмущений на равновесие в системах с симметрией. Такие возмущения могут приводить к расщеплению конфигурации и образованию новых семейств вложенных торов — «магнитных островов». Сейчас распространена точка зрения, что если магнитные острова имеют достаточную амплитуду, соответствующую перекрытию островов разных семейств, то конфигурация превращается в стохастическую и удержание плазмы в ней теряется [21, 22]. Однако здесь правомерно также предположение, что плазма может преияствовать стохастизации силовых линий и поддерживать тороидальную структуру. Кроме того, важно, что имеются области с тороидальными поверхностями, разделяющие области с блуждающими силовыми линиями. Вопрос о разрушении конфигурации относится к теории устойчивости равновесных конфигураций, и мы не будем его касаться в дальнейшем.

Рассмотрим теперь простейшую конфигурацию с одной магнитной осью и покажем, как можно описать равновесие, чтобы была близкой аналогия с простейшим случаем цилиндра круглого сечения [23, 24].

Удобно каждой магнитной поверхности приписать численную характеристику  $a$ , которая является «радиальной» координатой. Кроме  $a$  надо ввести циклические переменные  $\theta$  и  $\zeta$  — полоидальную и тороидальную циклические переменные, изменяющиеся в пределах  $0 — 2\pi$  при одном обходе соответственно по малому и большому обходу вокруг тора. Конкретизация такой «натуральной» системы координат  $a, \theta, \zeta$  происходит в разных задачах по-разному и диктуется соображениями удобства. Часто под  $a$  понимают такую хорошо определенную величину, как объем  $V$ , заключенный внутри тороидальной поверхности. В дальнейшем, не ограничивая общности, под  $a$  будем подразумевать аналог малого радиуса тора, который для цилиндра переходит в  $r$ . На магнитной оси  $a = 0$ .

Физическими характеристиками тороидальной конфигурации являются давление плазмы  $p(a)$  и магнитные потоки  $\Psi(a), \Phi(a)$ , и токи  $F(a), \mathcal{I}(a)$ . Под  $\Psi(a)$  понимается полоидальный магнитный поток,

пронизывающий отверстие тора (контур  $a = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ). Если, как и в § 2, выделить поток  $\Psi_0$ , охватываемый магнитной осью, то разность

$$\chi(a) = \Psi_0 - \Psi(a) \quad (2.47)$$

будет давать внутренний поток между магнитной осью и поверхностью тора [ $\chi(0) = 0$ ]. Аналогичный смысл имеют полоидальный ток  $F(a)$ , пронизывающий отверстие тора, и ток  $I(a)$  между магнитной осью и поверхностью тора:

$$I(a) = F_0 - F(a). \quad (2.48)$$

Продольные поток  $\Phi(a)$  и ток  $\mathcal{Y}(a)$  представляют магнитный поток и ток через поперечное сечение тора (контур  $a = \text{const}$ ,  $\zeta = \text{const}$ ).

Рассмотрим связь между компонентами магнитных полей и интегральными характеристиками. Потоки  $\chi(a)$  через перегородку  $\theta = \text{const}$  и  $\Phi(a)$  через перегородку  $\zeta = \text{const}$ , пользуясь формулами (П.42) приложения, можно записать в виде

$$\chi(a) = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}_2 = \int_0^a da \int_0^{2\pi} B^2 \sqrt{g} d\zeta; \quad (2.49)$$

$$\Phi(a) = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}_3 = \int_0^a da \int_0^{2\pi} B^3 \sqrt{g} d\theta. \quad (2.50)$$

где  $B^2$ ,  $B^3$  — контравариантные компоненты поля:  $B^i = \mathbf{B} \nabla x^i$  ( $x^i = a, \theta, \zeta$ );  $\sqrt{g} = |\nabla a [\nabla \theta \nabla \zeta]|^{-1}$ , так что  $dV = \sqrt{g} da d\theta d\zeta$ .

Учитывая, что  $B^1 = \mathbf{B} \nabla a = 0$ , из (2.49), (2.50) получаем выражение для контравариантных компонент поля

$$\begin{aligned} B^i &= \left\{ 0, \frac{\chi' - \partial \eta / \partial \zeta}{2\pi \sqrt{g}}, \frac{\Phi' + \partial \eta / \partial \theta}{2\pi \sqrt{g}} \right\} = \\ &= \left\{ 0, -\frac{\Psi' + \partial \eta / \partial \zeta}{2\pi \sqrt{g}}, \frac{\Phi' + \partial \eta / \partial \theta}{2\pi \sqrt{g}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Аналогично для плотности тока имеем

$$\begin{aligned} j^i &= \left\{ 0, \frac{I' - \partial v / \partial \zeta}{2\pi \sqrt{g}}, \frac{\mathcal{Y}' + \partial v / \partial \theta}{2\pi \sqrt{g}} \right\} = \\ &= \left\{ 0, -\frac{F' + \partial v / \partial \zeta}{2\pi \sqrt{g}}, \frac{\mathcal{Y}' + \partial v / \partial \theta}{2\pi \sqrt{g}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Здесь  $\eta$ ,  $v$  — некоторые периодические функции  $\theta$ ,  $\zeta$ .

Пользуясь соотношениями  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ , можно найти выражения для ковариантных компонент векторного потенциала  $A_i$  и магнитного поля  $B_i$ :

$$A_i = \frac{1}{2\pi} \{-\eta, \Phi, \Psi\}; \quad (2.53)$$

$$B_i = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a} - v, \mathcal{Y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, F + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right\}. \quad (2.54)$$

Периодическая функция  $\varphi$  представляет безвихревую часть магнитного поля  $\mathbf{B}$ . В векторном потенциале (2.53) аналогичная функция может быть опущена, так как  $\mathbf{A}$  определен с точностью до вектор-градиента.

Уравнение равновесия (1.1) можно записать теперь в виде

$$4\pi^2 c p' \sqrt{g} = -(F' + \partial v / \partial \xi) (\Phi' + \partial \eta / \partial \theta) + (\mathcal{Y}' + \partial v / \partial \theta) (\Psi' + \partial \eta / \partial \xi), \quad (2.55)$$

а уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ , которое уже было использовано при получении (2.54), сводится просто к связи ко- и контравариантных компонент магнитного поля:

$$\frac{4\pi}{c} \left( -v + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right) = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \left( \Psi' + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right); \quad (2.56)$$

$$\frac{4\pi}{c} \left( \mathcal{Y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \left( \Psi' + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right); \quad (2.57)$$

$$\frac{4\pi}{c} \left( F + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = -\frac{g_{32}}{\sqrt{g}} \left( \Psi' + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right). \quad (2.58)$$

Рассмотрим, чему соответствует каждое слагаемое для цилиндрического шнура круглого сечения. В этом случае  $a$  имеет смысл малого радиуса  $\rho$ , а  $\xi = s/R$ , где  $R$  — радиус эквивалентного тора, при этом

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = a^2, \quad g_{33} = R^2, \quad \sqrt{g} = aR, \quad g_{ik} = 0, \quad i \neq k. \quad (2.59)$$

Кроме того,

$$\Phi' = 2\pi a B_s, \quad \Psi' = -2\pi R B_\theta. \quad (2.60)$$

Уравнение (2.55) сводится к уравнению баланса давлений по малому радиусу (2.2), уравнения (2.57) и (2.58) — к соотношению между магнитными полями  $B_\theta$  и  $B_s$  и плотностями токов (2.1).

Рассмотрим теперь общий случай осевой симметрии:  $\partial / \partial \xi = 0$ ,  $g_{13} = g_{23} = 0$ ,  $g_{33} = r^2$ , и проследим связь с традиционным описанием равновесия (см. § 2.2). После исключения из (2.57) функции  $\varphi$  с помощью (2.56) система уравнений сводится к следующей:

$$4\pi^2 c p' \sqrt{g} = -F' \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) + \left( \mathcal{Y}' + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \Psi'; \quad (2.61)$$

$$\frac{4\pi}{c} \left( \mathcal{Y}' + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \Psi' + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \Psi'; \quad (2.62)$$

$$\frac{4\pi}{c} F = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right). \quad (2.63)$$

Уравнение (2.61) можно использовать для выражения плотности тока  $j_s$  в виде, аналогичном (2.20):

$$j_s = \sqrt{g_{33}} j^3 = \frac{r (\mathcal{Y}' + \partial v / \partial \theta)}{2\pi \sqrt{g}} = 2\pi r \left[ c \frac{p'}{\Psi'} + \frac{4\pi}{c} \frac{FF'}{4\pi^2 r^2 \Psi'} \right]. \quad (2.64)$$



Подставляя  $\mathcal{Y}' + \partial v/\partial\theta$  из (2.61) в (2.62), получаем аналог уравнения (2.21) для потока  $\psi$ , записанный в натуральных координатах:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \Psi' - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \Psi' \right] = -\frac{4\pi}{c} 4\pi^2 \left[ c \frac{p'}{\Psi'} + \frac{4\pi}{c} \frac{FF'}{4\pi^2 r^2 \Psi'} \right]. \quad (2.65)$$

Этим уравнениям можно придать квазицилиндрическую форму, если ввести усредненные величины

$$\bar{B}_\theta = -\Psi'/2\pi R; \quad \bar{B}_s = \Phi'/2\pi a; \quad (2.66)$$

$$\bar{j}_s = \mathcal{Y}'/2\pi a; \quad \bar{j}_\theta = -F'/2\pi R, \quad (2.67)$$

где  $R$  — некоторый характерный большой радиус, например радиус магнитной оси, тогда имеем

$$p' \left\langle \frac{\sqrt{g}}{aR} \right\rangle = \frac{1}{c} (\bar{j}_\theta \bar{B}_s - \bar{j}_s \bar{B}_\theta); \quad (2.68)$$

$$\frac{4\pi}{c} \bar{j}_s = \frac{1}{a} \frac{d}{da} \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{R}{a} \right\rangle a \bar{B}_\theta; \quad (2.69)$$

$$\frac{4\pi}{c} \bar{j}_\theta = -\frac{d}{da} \frac{\bar{B}_s}{\left\langle \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{R}{a} \right\rangle}. \quad (2.70)$$

Для прямолинейного шнура круглого сечения коэффициенты в угловых скобках в (2.68)—(2.70) обращаются в 1. Для тороидального шнура круглого сечения в них появляются поправки  $\sim a^2/R^2$ ,  $a^2/R^2 \beta_{\mathcal{Y}}^2$ .

Усредненные по угловым переменным коэффициенты  $\langle \sqrt{g}/aR \rangle$ , фигурирующие здесь, должны определяться уже после решения двумерного уравнения равновесия (2.65), которое после выделения усредненной части становится эквивалентным уравнению

$$\Psi' \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\tilde{g}_{22}}{\sqrt{g}} \right) \Psi' - \Psi'^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} = \frac{4\pi}{c} c 4\pi^2 p' \times \\ \times \left[ \langle \sqrt{g} \rangle \frac{(\tilde{V}\tilde{g}/g_{33})}{\langle \tilde{V}\tilde{g}/g_{33} \rangle} - (\tilde{V}\tilde{g}) \right] + \Psi' \frac{(\tilde{V}\tilde{g}/g_{33})}{\langle \tilde{V}\tilde{g}/g_{33} \rangle} \frac{d}{da} \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \Psi'. \quad (2.71)$$

Здесь скобки  $(\tilde{V}\tilde{g})$  обозначают осциллирующую часть:  $(\tilde{V}\tilde{g}) = \sqrt{g} - \langle \sqrt{g} \rangle$ .

Ниже будет показано, как пользоваться уравнениями в натуральных координатах при решении задач равновесия.

## § 2.5. Удерживающее поле. Принцип виртуального кожуха

В прямом шнуре круглого сечения равновесная конфигурация определяется распределением давления и продольного тока по радиусу. Наложение внешних полоидальных полей меняет форму сечения плазменного шнура. В этом общем случае равновесная конфигурация определяется распределением давления  $p(a)$  и продольного тока  $\mathcal{I}(a)$  по магнитным поверхностям и магнитными полями  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$ , создаваемыми внешними источниками. Эти поля  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$  будем называть удерживающими. Основная задача теории равновесия и состоит в отыскании пространственных распределений полей, токов, давления по заданным удерживающим полям  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$  и заданным каким-либо образом  $p(a)$ ,  $\mathcal{I}(a)$  или им эквивалентных функций [например,  $p(a)$ ,  $FF'(a)$  или  $p(a)$ ,  $\Psi'(a)$ ].

Однако в такой постановке даже для простейших случаев задачу можно решить только численно, так как граница плазмы, разделяющая токовую область и область вакуумных полей, должна определяться только после решения задачи. Поэтому обычно применяется разделение задачи на три:

1. Определение конфигурации внутри шнура по заданным  $p(a)$ ,  $\mathcal{I}(a)$  при фиксированной границе плазмы, форма которой определяется соображениями устойчивости, конструкцией установок и т. п.

2. Отыскание вакуумных полей вне плазмы путем их сшивки с внутренним решением, выделение из полного вакуумного поля удерживающего  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$  и определение необходимых для равновесия токов.

3. Корректировка границы плазмы с учетом реальных ограничений на количество, распределение и амплитуды внешних токов.

Вторая задача является чисто магнитостатической. Но ее постановка нетрадиционна, так как оба граничных условия ставятся на поверхности плазмы: требуются обращение в нуль нормальной компоненты  $V_n = 0$  и сшивка тангенциальных компонент полей с внутренним решением из условия баланса давления. Если вакуумное поле характеризовать скалярным потенциалом  $\Phi_B$ :  $\mathbf{V} = \nabla\Phi_B$ , то получается задача Коши для уравнения Лапласа. Она содержит трудности для численного решения, так как мелкомасштабные возмущения границ плазмы приводят к сильным искажениям решения, что требует применения методов регуляризации.

Для определения удерживающего поля, однако, имеется универсальный способ, получивший название принципа виртуального кожуха, позволяющий обойтись без решения внешней магнитостатической задачи [25]. Если плазму мысленно окружить тонким замкнутым идеально-проводящим кожухом, идущим вдоль ее границы, то равновесие будет заведомо обеспечено. При этом удерживающее поле будет создаваться токами отражения в кожухе. Определить их легко, так как вне такого кожуха магнитное поле равно нулю. Поэтому имеется простое соотношение

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{i} = [\mathbf{Bn}], \quad (2.72)$$

позволяющее явно вычислить распределение поверхностного тока  $\mathbf{i}$  по кожуху, если из решения внутренней задачи известно магнитное поле  $\mathbf{B}$  на границе ( $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали). Принцип виртуального кожуха состоит в том, что поле поверхностного тока  $\mathbf{i}$  (2.72) внутри плазмы совпадает с необходимым для равновесия удерживающим полем, а вне ее равно по величине и противоположно по знаку собственному полю тока плазмы.

Принцип виртуального кожуха, в частности, решает общую магнитостатическую задачу замены поля объемного тока полем поверхностного тока  $\mathbf{i}$ . Для этого достаточно на какой-либо магнитной поверхности вычислить поле объемного тока  $\mathbf{B}$  и распределить по ней поверхностный ток  $\mathbf{i}$  в соответствии с (2.72). Отметим, что если эта магнитная поверхность образована только собственным полем объемного тока (отсутствуют поля источников, расположенных вне магнитной поверхности), то формула (2.72), дает распределение тока по поверхности сверхпроводящего тора, совпадающей по форме с выбранной магнитной поверхностью.

### § 2.6. Интегральные соотношения для тороидального плазменного шнура

В этом параграфе будут рассмотрены интегральные соотношения, позволяющие связать некоторые внутренние характеристики плазменного шнура с магнитными полями вне плазмы [26, 27].

Для дальнейшего удобно общее магнитное поле равновесной конфигурации представить в виде суммы

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \quad (2.73)$$

где  $\mathbf{B}_2$  — безвихревое поле внутри рассматриваемой области

$$\text{rot } \mathbf{B}_2 = 0. \quad (2.74)$$

Способ выделения  $\mathbf{B}_2$ , естественно, неоднозначен. Представляют интерес следующие случаи: а)  $\mathbf{B}_2 = 0$ , т. е. все поле включено в  $\mathbf{B}_1$ ; б)  $\mathbf{B}_2$  равно удерживающему полю внешних источников, т. е.  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{\text{ext}}$ . В этом случае  $\mathbf{B}_1$  представляет собственное поле плазмы  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{\text{pl}}$ ; в)  $\mathbf{B}_2$  — постоянная во времени часть внешнего поля, выпадающая из зондовых измерений.

Умножим уравнение равновесия (1.1) на произвольный пока вектор  $\mathbf{Q}$ . Используя векторное тождество

$$\mathbf{Q} [\text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}] = \text{div} \left[ (\mathbf{Q}\mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{B^2}{2} \mathbf{Q} \right] + \frac{B^2}{2} \text{div } \mathbf{Q} - \mathbf{B} (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{Q} \quad (2.75)$$

и интегрируя по произвольному объему  $V$  с поверхностью  $S$ , получаем

$$\int_V \left[ \left( p + \frac{B_1^2}{8\pi} \right) \text{div } \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_1 \nabla) \mathbf{Q}}{4\pi} \right] dV = \oint_S \left[ \left( p + \frac{B_1^2}{8\pi} \right) (\mathbf{Q}\mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{B}_1) (\mathbf{B}_1 \mathbf{n})}{4\pi} \right] dS - \frac{1}{c} \int_V \mathbf{Q} [j\mathbf{B}_2] dV, \quad (2.76)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль к  $S$ .

Если в качестве  $\mathbf{Q}$  взять радиус-вектор  $\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$ , а  $\mathbf{B}_2 = 0$ , то из этого общего интегрального соотношения получается теорема вириала

$$\int_V \left( 3p + \frac{B^2}{8\pi} \right) dV - \oint_S \left[ \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) (\mathbf{R}\mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{R}\mathbf{B})(\mathbf{B}\mathbf{n})}{4\pi} \right] dS, \quad (2.77)$$

из которой следует, в частности, невозможность равновесия плазмы только за счет собственного магнитного поля (при отсутствии удерживающих полей). Так как при удалении от замкнутой конфигурации ее собственное поле  $B_{pl} \sim 1/R^3$ , интеграл в правой части при увеличении области интегрирования обратился бы в ноль, если бы поле  $\mathbf{B}$  было только собственным, и равенство (2.77) было бы невозможным.

Для получения некоторых других следствий (2.76) ограничимся случаем осевой симметрии,  $\partial/d\xi = 0$ . Удобно отделить в  $\mathbf{B}$  полоидальное и тороидальное поля:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_s. \quad (2.78)$$

Будем считать, что поверхность  $S$  проходит вне плазмы, где  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , и что векторы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{B}_2$  чисто полоидальные:

$$\mathbf{Q} = Q_r\mathbf{e}_r + Q_z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B}_2 = B_{2r}\mathbf{e}_r + B_{2z}\mathbf{e}_z. \quad (2.79)$$

Учитывая, что в вакууме продольное поле меняется по закону

$$B_{se} = \text{const}/r, \quad (2.80)$$

можно получить следующие вспомогательные соотношения:

$$\oint_S B_{se}^2 (\mathbf{Q}\mathbf{n}) dS = \int_V B_{se}^2 \left( \text{div } \mathbf{Q} - 2 \frac{Q_r\mathbf{e}_r}{r} \right) dV; \quad (2.81)$$

$$\mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_1 \nabla) \mathbf{Q} = \mathbf{B}_{p1} (\mathbf{B}_{p1} \nabla) \mathbf{Q} + B_s^2 \frac{Q_r\mathbf{e}_r}{r}. \quad (2.82)$$

С их помощью интегральное уравнение равновесия (2.76) можно переписать так, чтобы продольное поле входило только в виде разности  $B_s^2 - B_{se}^2$  и только в левую часть уравнения. В связи с этим можно опустить индекс  $p$  у полоидальных компонентов и вместо (2.76) будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \left( p + \frac{B_1^2}{8\pi} \right) \text{div } \mathbf{Q} + \frac{B_s^2 - B_{se}^2}{8\pi} \left( \text{div } \mathbf{Q} - 2 \frac{Q_r\mathbf{e}_r}{r} \right) - \frac{\mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_1 \nabla) \mathbf{Q}}{4\pi} \right] dV = \\ & = \oint_S \left[ \left( p + \frac{B_1^2}{8\pi} \right) (\mathbf{Q}\mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{B}_1) (\mathbf{B}_1 \mathbf{n})}{4\pi} \right] dS - \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j} [\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}] dV. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Введем обозначения

$$P = p + (B_s^2 - B_{se}^2)/8\pi; \quad (2.84)$$

$$T = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_1^2/8\pi - (B_s^2 - B_{se}^2)/8\pi, \quad (2.85)$$

Тогда подынтегральное выражение в левой части (2.83) можно записать в виде

$$[\dots] = P \left( \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) + \frac{T}{r} Q_r + \frac{B_{1r}^2 - B_{1z}^2}{8\pi} \left( \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \frac{\partial Q_r}{\partial r} \right) - \\ - \frac{B_{1r} B_{1z}}{4\pi} \left( \frac{\partial Q_r}{\partial z} + \frac{\partial Q_z}{\partial r} \right). \quad (2.86)$$

Выберем вектор  $\mathbf{Q}$  так, чтобы обратить в нуль два последних слагаемых. Введем для краткости записи комплексную переменную

$$u = r - R + iz = \rho \exp(i\omega), \quad (2.87)$$

где  $R$  — некоторый характерный большой радиус.

Если выбрать вектор  $\mathbf{Q}$  так, что

$$Q_r = F(u), \quad Q_z = -iF(u), \quad (2.88)$$

где  $F$  — регулярная функция комплексной переменной  $u$ , то два последних слагаемых в (2.86) обратятся в нуль. В частности, взяв

$$F(u) = u^{m+1}, \quad (2.89)$$

получим

$$\int_V \left[ 2(m+1)Pu^m + \frac{T}{r} u^{m+1} \right] dV = \oint_S \left[ \left( p + \frac{B_1^2}{8\pi} \right) (n_r - in_z) - \right. \\ \left. - \frac{(B_1 n)(B_{1r} - B_{1z})}{4\pi} \right] u^{m+1} dS - \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j} [\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}] dV. \quad (2.90)$$

Будем в дальнейшем различать два приближения —  $x$ -приближение (большое аспектное отношение)

$$|r - R| \ll R, \quad (2.91)$$

и  $\rho$ -приближение (малая тороидальность):

$$\rho \ll R. \quad (2.92)$$

Второе ограничение более сильное, так как оно предполагает малость поперечного сечения не только в направлении большого радиуса, но и в направлении  $z$ . Поэтому второе приближение не годится для сильно вытянутых систем, у которых  $z \approx R$ .

Рассмотрим соотношение (2.90) при  $m = -1$ . Если отождествить  $\mathbf{B}_2$  с удерживающим полем  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{\text{ext}}$  (тогда  $\mathbf{B}_1$  — поле тока плазмы,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{\text{pl}}$ ) и устремить объем интегрирования к бесконечности, то получим условие

$$\frac{1}{c} \int_V j_s B_{\text{ext},z} dV = - \int_V \frac{T}{r} dV, \quad (2.93)$$

или

$$\frac{1}{c} \int j_s B_{\text{ext},z} r dS_{\xi} = - \int \left[ p + \frac{B_{\text{pl}}^2}{8\pi} - \frac{B_s^2 - B_{sl}^2}{8\pi} \right] dS_{\xi}. \quad (2.94)$$

Интеграл в левой части представляет направленную по большому радиусу силу взаимодействия продольного тока с удерживающим полем, обеспечивающую равновесие по большому радиусу. Из (2.94) видно, что она должна скомпенсировать баллонную силу  $\int p dS_{\xi}$ , силу взаимодействия полоидальных токов плазмы с продольным полем  $\int \frac{B_{se}^2 - B_s^2}{8\pi} dS_{\xi}$ , а также электродинамическую силу расталкивания плазменного витка под действием собственного поля  $\int \frac{B_{p1}^2}{8\pi} dS_{\xi}$ .

При условии малой тороидальности можно считать, что зависимость от  $r$  входит в  $T$  в виде разности  $r - R$ , так что  $dT/dr = -dT/dR$ . Заменяя, что  $T/r = \text{div } T \mathbf{e}_r - dT/dr$ , получаем в  $\rho$ -приближении

$$\int \frac{T}{r} dV = - \int \frac{\partial T}{\partial r} dV \approx \frac{\partial}{\partial R} \int T dV. \quad (2.95)$$

Здесь использовано обращение  $T$  в нуль на бесконечности. Если ввести определения

$$B_{\perp} = - \frac{1}{2\pi R \mathcal{F}} \int j_s B_{\text{ext},z} dV; \quad (2.96)$$

$$L_{p1} = \frac{c^2 \int B_{p1}^2 dV}{4\pi \mathcal{F}^2} \quad (2.97)$$

для среднего поперечного удерживающего поля и индуктивности шнура ( $\mathcal{F}$  — полный ток в плазменном шнуре), то формула (2.93) в  $\rho$ -приближении даст выражение для поперечной компоненты удерживающего поля

$$B_{\perp} = -B_{z,\text{ext}} = \frac{\mathcal{F}}{2cR} \left[ \beta_{\mathcal{F}} + \mu_{\mathcal{F}} + \frac{\partial L_{p1}}{2\pi \partial R} \right]. \quad (2.98)$$

При  $m = 0$  соотношение (2.90) дает интегральное условие равновесия по малому радиусу

$$\int_V p dV + \frac{R_T - R}{2R_T} \int T dV = \frac{1}{2} \oint_S \left[ \frac{B_{\tau 1}^2 - B_{n1}^2}{8\pi} (\mathbf{n} \mathbf{e}_{\rho}) - \frac{B_{\tau 1} B_{n1}}{4\pi} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{e}_{\rho}) \right] \rho dS - \frac{1}{2c} \int_V j_s [B_{z2}(r - R) - B_{r2} z] dV, \quad (2.99)$$

где  $R_T$  — «средний радиус» тороидальной конфигурации, ограниченной выбранной поверхностью:

$$R_T = \int T r dS_{\xi} / \int T dS_{\xi}; \quad (2.100)$$

$B_{\tau}$ ,  $B_n$  — тангенциальная и нормальная к  $S$  компоненты полоидального поля. В  $x$ -приближении можно опустить слагаемое с множителем  $(R - R_T)/2R_T$ . Левая часть (2.99) при этом становится не зависимой

от выбора  $S$ . То же, следовательно, относится и к правой части. Соотношение (2.99) можно записать в виде

$$\int PdV = \frac{\pi R \mathcal{Y}^2}{c^2} S_1, \quad (2.101)$$

где  $S_1$  — соответствующие интегралы, фигурирующие в правой части (2.99).

Поскольку  $S_1$  не зависит от выбора  $\mathbf{B}_2$  и, в частности, можно взять  $B_2 = 0$ , величина  $S_1$  выражается через измеряемое вне плазмы полное полоидальное поле. Последнее равенство является обобщением интегрального условия равновесия в цилиндрическом шнуре (2.9) на тороидальные конфигурации:

$$\beta_{\mathcal{Y}} = S_1 + \mu_{\mathcal{Y}}. \quad (2.102)$$

Отличие  $S_1$  от 1 связано с некруглостью сечения. Это легко увидеть, если считать, что  $B_2 = B_{\text{ext}}$ . Тогда  $B_{\tau 1} \approx 2\mathcal{Y}/c\rho$ , а  $B_{n1} \approx 0$  (в приближении малой тороидальности) и поверхностный интеграл в (2.99) равен  $\pi R \mathcal{Y}^2/c^2$ , а для  $S_1$  получаем

$$S_1 = 1 - \frac{c}{2\pi R \mathcal{Y}^2} \int j_s [B_{z,\text{ext}}(r-R) - B_{r,\text{ext}} z] dV. \quad (2.103)$$

Однородное удерживающее поле  $-B_1 \mathbf{e}_z$ , служащее для компенсации тороидального расталкивания, вклада в  $S_1$  не дает. Отличие  $S_1$  от 1 будет заметным, если в  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  присутствует поле, деформирующее сечение шнура. Так, для прямолинейного шнура эллиптического сечения с отношением полуосей  $\lambda$  при однородной плотности тока в шнуре

$$S_1 = 1 - (\lambda - 1)^2 / (\lambda^2 + 1). \quad (2.104)$$

Как следует из (2.102), в отсутствие полоидальных токов  $\mu_{\mathcal{Y}} = 0$ ,  $\beta_{\mathcal{Y}}$  в общем случае не равна 1. Иногда удобно использовать вместо  $\beta_{\mathcal{Y}}$  параметр  $\beta_p$ , который при  $\mu_{\mathcal{Y}} = 0$ , т. е. при удержании плазмы только полоидальным полем, обращался бы в 1. В приближении малой тороидальности можно положить

$$\beta_p = \beta_{\mathcal{Y}}/S_1, \quad \mu_p = \mu_{\mathcal{Y}}/S_1, \quad (2.105)$$

тогда  $\beta_p = 1 + \mu_p$ . В общем случае для инвариантного введения  $\beta_p$  воспользуемся усредненным по углам уравнением равновесия (2.61), которое запишем в виде

$$cdp/dV = -\frac{dF}{dV} \frac{d\Phi}{dV} + \frac{d\mathcal{Y}}{dV} \frac{d\Psi}{dV}. \quad (2.106)$$

Здесь переменная  $V$  имеет смысл объема, заключенного внутри тороидальной поверхности, так что  $dV = 4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle da$ . Умножая (2.106) на  $V$  и интегрируя по частям, получаем

$$c \int pdV = - \int V \frac{d\mathcal{Y}}{dV} \frac{d\Psi}{dV} dV + \int V \frac{dF}{dV} \frac{d\Phi}{dV} dV. \quad (2.107)$$

Все интегралы здесь не зависят от выбора объема интегрирования, так как вне плазмы  $p = 0$ ,  $d\mathcal{F}/dV = 0$ ,  $dF/dV = 0$ . Определяя  $\beta_p$  и  $\mu_p$  следующим образом:

$$\beta_p = -\frac{c \int p dV}{\int V \frac{d\mathcal{F}}{dV} \frac{d\Psi}{dV} dV}; \quad (2.108)$$

$$\mu_p = -\frac{\int V \frac{dF}{dV} \frac{d\Phi}{dV} dV}{\int V \frac{d\mathcal{F}}{dV} \frac{d\Psi}{dV} dV}, \quad (2.109)$$

получаем универсальное соотношение для произвольных тороидальных конфигураций

$$\beta_p = 1 + \mu_p. \quad (2.110)$$

Для шнура эллиптического сечения с однородным током в соответствии с (2.104)

$$\beta_{\mathcal{F}}/\beta_p = \mu_{\mathcal{F}}/\mu_p = 2\lambda/(\lambda^2 + 1).$$

Параметры  $\beta_p$ ,  $\mu_p$  в отличие от  $\beta_{\mathcal{F}}$ ,  $\mu_{\mathcal{F}}$  содержат интегралы от магнитного поля по объему плазмы и поэтому менее удобны. Их введение может быть полезно при оптимизации равновесных конфигураций численными методами.

При  $m = 1, 2, \dots$  интегральное соотношение (2.90) позволяет связать моменты величины  $P$  такие, как  $\int P x dV$ ,  $\int P (x^2 - z^2) dV$  и т. д. ( $x = R - r$ ), с магнитными полями вне плазменного шнура. Это дает возможность экспериментального определения этих моментов из зондовых измерений. В частности, соотношение (2.102) позволяет определить  $\beta_{\mathcal{F}}$  при дополнительном измерении диамагнитного сигнала, дающего величину  $\mu_{\mathcal{F}}$ .

Вместо измерения высших моментов давления плазмы на практике используется сравнение экспериментально измеряемого полоидально-го поля вне плазмы с двумерными численными расчетами равновесия плазмы с небольшим числом подгоночных параметров [28, 29].

Наряду с интегральным соотношением (2.90), связывающим квадратичные комбинации магнитных полей, можно воспользоваться теоремой взаимности электродинамики и получить соотношения, связывающие моменты плотности тока с контурными интегралами.

Умножим уравнение

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B} \quad (2.111)$$

на вспомогательный вектор  $\mathbf{q}$ , удовлетворяющий условию

$$\text{rot } \mathbf{q} = \nabla g. \quad (2.112)$$



Вектор  $\mathbf{q}$  и скаляр  $g$  можно рассматривать как векторный и скалярный потенциалы некоторого безвихревого поля. Используя векторное тождество

$$\operatorname{div} [\mathbf{Bq}] = \mathbf{q} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{q}, \quad (2.113)$$

проинтегрируем уравнение (2.111), умноженное на  $\mathbf{q}$ , по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ . В результате имеем

$$\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{q} dV = \oint \{ [\mathbf{Bq}] + g\mathbf{B} \} dS. \quad (2.114)$$

В случае осевой симметрии  $\partial/\partial z = 0$ , полагая  $\mathbf{q} = \frac{f}{r} \mathbf{e}_s$ ,  $dV = 2\pi r dS_z$ , имеем

$$\frac{4\pi}{c} \int j_z f dS_z = \oint (f B_\tau + g r B_n) dl. \quad (2.115)$$

Интеграл в правой части берется по контуру сечения поверхности  $S$ , а  $B_\tau$ ,  $B_n$  — тангенциальный и нормальный компоненты магнитного поля. Функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^* f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.117)$$

Для  $f = 1$ ,  $g = 0$  соотношение (2.115) дает выражение для полного тока через контурный интеграл. При  $f \neq 1$  можно получить информацию о моментах распределения тока.

При переходе к прямолинейной системе,  $r = R - x$ ,  $R \rightarrow \infty$ , функции  $f$ ,  $g$  являются гармоническими и их можно взять в виде

$$f_m = (x + iz)^m, \quad g_m = -if_m/R \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.118)$$

В тороидальном случае в качестве набора независимых решений (2.116), (2.117) можно взять (ограничимся случаем симметрии относительно плоскости  $z = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} f^{(0)} &= 1, & g^{(0)} &= 0; \\ f^{(1)} &= r^2, & g^{(1)} &= 2z; \\ f^{(2)} &= r^4 - 4r^2 z^2, & g^{(2)} &= 4r^2 z - \frac{8}{3} z^3; \\ f^{(3)} &= r^6 - 12r^4 z^2 + 8r^2 z^4, & g^{(3)} &= 6r^4 z - 16r^2 z^3 + \frac{16}{5} z^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.119)$$

и т. д. Чтобы был непосредственный переход к прямолинейной системе, в качестве тороидальных мультипольных моментов следует взять комбинации

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -(f^{(1)} - R^2 f^{(0)})/2R; \\ f_2 &= (f^{(2)} - 2R^2 f^{(1)} + R^4 f^{(0)})/4R^2; \\ f_3 &= -(f^{(3)} - 3R^2 f^{(2)} + 3R^4 f^{(1)} - R^6)/8R^3, \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

где  $R = \text{const}$  — характерный радиус конфигурации. Обозначая  $x = r - R$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x(1 - x/2R), \quad g_1 = -z/R; \\ f_2 &= x^2(1 - x/2R)^2 - z^2(1 - x/R)^2, \quad g_2 = -2xz/R + \\ &\quad + \left(x^2 z - \frac{2}{3} z^3\right) / R^2; \\ f_3 &= x^3(1 - x/2R)^3 - 3xz(1 - x/2R)(1 - x/R)^2 - \\ &\quad - z^4/R(1 - x/R)^2; \\ g_3 &= -\frac{3x^2 z}{R}(1 - x/2R)^2 + (z^3/R)(1 - 4x/R + 2x^2/R^2) - \\ &\quad - (2/5)(z^5/R^3). \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

Моментами  $Y_m$  распределения тока для тороидального шнура будут величины

$$Y_m = \frac{1}{\mathcal{F}} \int j_s f_m dS_\zeta = \frac{c}{4\pi\mathcal{F}} \oint (f_m B_\tau + r g_m B_n) dl. \quad (2.122)$$

В качестве  $R$  удобно выбрать средний радиус токового канала  $R_{\mathcal{F}}$ , который определяется соотношением

$$R_{\mathcal{F}}^2 = \frac{1}{\mathcal{F}} \int j_s r^2 dS_\zeta. \quad (2.123)$$

При  $R = R_{\mathcal{F}}$  первый момент  $Y_1$  обращается в нуль:  $Y_1 = 0$ .

В заключение отметим, что правая часть в интегральных соотношениях для плотности тока не зависит от присутствия внешних удерживающих полей,  $\oint (f_m B_{\tau, \text{ext}} + r g_m B_{n, \text{ext}}) dl = 0$ , и определяется только собственным полем тока плазмы. Кроме того, при выводе этих интегральных соотношений не использовалось уравнение равновесия, ограничивающее допустимые распределения плотности тока  $j_s$ . Их учет дает возможность построить метод моментов для решения задач равновесия (см. § 3.6).

Моменты плотности тока (2.122) в отличие от моментов давления содержат линейные комбинации магнитных полей и поэтому легко могут быть измерены в эксперименте с помощью зондов типа пояса Роговского с определенным образом сделанной намоткой. Это дает возможность на установках с некруглым сечением следить за геометрическими характеристиками токового канала [30].

В этой главе будут рассмотрены характерные равновесные конфигурации, для которых имеется точное решение уравнений равновесия как в плазме, так и в вакуумной области. Они позволяют количественно описать взаимодействие тока в плазме с внешними удерживающими полями. Равновесие прямолинейного шнура эллиптического сечения с однородным током позволяет понять влияние удерживающего поля на форму сечения, при этом устанавливается существование критической величины удерживающего поля, выше которой равновесие становится невозможным. Аналитическое решение для шнура эллиптического сечения с винтовой симметрией выявляет роль продольного поля в поддержании равновесия. Точное решение для тороидального шнура круглого сечения показывает основной эффект тороидальности, состоящий, во-первых, в необходимости добавления поперечного поля для компенсации тороидального расталкивания шнура, а во-вторых, в существовании предельного значения  $\beta_{\mathcal{X}}$ . Шарообразная равновесная конфигурация типа вихря Хилла является предельным равновесием тороидального шнура малого аспектного отношения в однородном удерживающем поле.

В этой же главе рассмотрены некоторые типичные задачи магнитостатики, связанные с теорией равновесия, а также дан обзор основных численных методов, разработанных для задач равновесия.

### § 3.1. Прямолинейный шнур эллиптического сечения

Уравнение равновесия (2.29) становится линейным, если плотность тока в плазме постоянна:  $j_s(A_s) = j_{pl} = \text{const}$ . Воспользуемся координатами эллиптического цилиндра  $u, v$ , связанными с декартовыми  $x, y$  соотношениями

$$x = d \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = d \operatorname{ch} u \sin v, \quad (3.1)$$

и примем поверхность  $u = u_0$  за границу плазмы. Обозначим:  $a$  — малая полуось сечения,  $\lambda$  — отношение полуосей, тогда

$$a = d \operatorname{sh} u_0, \quad \lambda = \operatorname{cth} u_0 \quad (3.2)$$

и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} d^2 &= a^2(\lambda^2 - 1); \quad \operatorname{sh} 2u_0 = 2\lambda/(\lambda^2 - 1); \\ \operatorname{ch} 2u_0 &= (\lambda^2 + 1)/(\lambda^2 - 1); \quad \exp(2u_0) = (\lambda + 1)^2/(\lambda^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Уравнение (2.29) для векторного потенциала  $A = A_s$  приобретает вид

$$\Delta A = \frac{2}{d^2 (\operatorname{ch} 2u + \cos 2v)} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} \right) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} j_{pl}, & u < u_0; \\ 0, & u > u_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Его решением, удовлетворяющим граничным условиям (2.22), (2.25), является [31]

$$A_i = -\frac{4\pi}{c} j_{pl} \frac{d^2}{8} \left[ \text{ch } 2u - \text{ch } 2u_0 - \cos 2v + \frac{\text{ch } 2u}{\text{ch } 2u_0} \cos 2v \right] =$$

$$= -\frac{4\pi}{c} j_{pl} \frac{\lambda^2 a^2}{2(\lambda^2 + 1)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 a^2} \right) \quad (3.5)$$

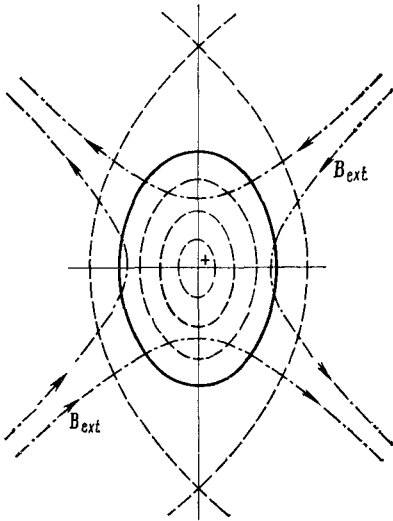


Рис. 2. Равновесная конфигурация для прямолинейного шнура эллиптического сечения. Отношение полуосей  $\lambda = 1,5$ :

сплошная линия ограничивает сечение токового канала; штриховой линией показана сепаратриса; штрихпунктир соответствует силовым линиям удерживающего поля

внутри плазмы и

$$A_e = -\frac{4\pi}{c} j_{pl} \frac{d^2}{8} \left[ 2(u - u_0) \text{sh } 2u_0 + \frac{\text{sh } 2u_0}{\text{ch } 2u_0} \text{sh } 2(u - u_0) \cos 2v \right] \quad (3.6)$$

в вакуумной области.

Магнитные поверхности  $A = \text{const}$  внутри плазмы имеют эллиптические сечения с тем же отношением полуосей  $\lambda$ , а внешние имеют сепаратрису, проходящую через точку  $v = \pi/2$ ,  $u = 2u_0$ , отделяющую область замкнутых поверхностей вблизи плазмы от области разомкнутых поверхностей (рис. 2). Поле вне плазмы не имеет сепаратрис только для прямолинейного шнура круглого сечения.

Выделим из внешнего поля удерживающее. Оно является регулярным внутри плазмы и включает в себя все особенности, расположенные вне плазмы (в том числе и при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ). Его векторный потенциал имеет вид

$$A_{\text{ext}} = -\frac{4\pi}{c} j_{pl} \frac{d^2}{8} \frac{\text{sh } 2u_0}{\text{ch } 2u_0} \exp(-2u_0) \text{ch } 2u \cos 2v =$$

$$= \frac{2\pi}{c} j_{pl} (y^2 - x^2) \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)}. \quad (3.7)$$

Удерживающее поле является чисто квадрупольным, и его взаимодействие с током плазмы создает силу, растягивающую сечение шнура. Баланс этой силы с собственным стягиванием плазмы и определяет форму сечения шнура. Проанализируем этот баланс подробнее.

Если обозначить  $A_2$  — амплитуда векторного потенциала (3.7),

$$A_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{c} A_2 (y^2 - x^2), \quad (3.8)$$

то будем иметь [32—34]

$$A_2/j_{p1} = \varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)/[(\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)]. \quad (3.9)$$

Функция  $\varphi(\lambda)$  изображена на рис. 3 и имеет максимум при  $\lambda = 2,8900$  ( $\varphi_{\max} = 0,1501$ ). Это означает, что при  $A_2/j_{p1} < 0,15$  имеется два равновесия: с  $\lambda < 2,89$  и  $\lambda > 2,89$  (рис. 4). Эти два равновесия можно рассматривать как возмущение соответственно шнура круглого сечения и плоского слоя квадрупольным удерживающим полем. При увеличении амплитуды квадрупольного поля выше критического значения  $A_{2, cr} = 0,15j_{p1}$  равновесие перестает существовать. Это связано с тем, что сила взаимодействия с удерживающим полем становится больше силы собственного стягивания плазмы, и внешнее поле разрывает шнур.

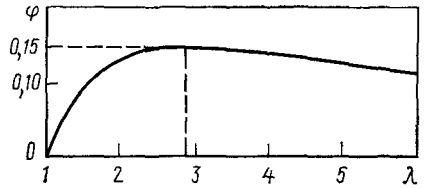


Рис. 3. Зависимость  $\varphi(\lambda) = A_2/j_{p1}$  от отношения полуосей  $\lambda = l_y/l_x$

Критическая величина квадрупольного поля зависит только от плотности тока плазмы,  $A_{2, cr}/j_{p1} = 0,15$ . Поэтому при однородном распределении тока равновесие становится невозможным сразу по всему сечению.

Легко представить себе картину равновесия во внешнем квадрупольном поле и при неоднородном (спадающем к границе) распреде-

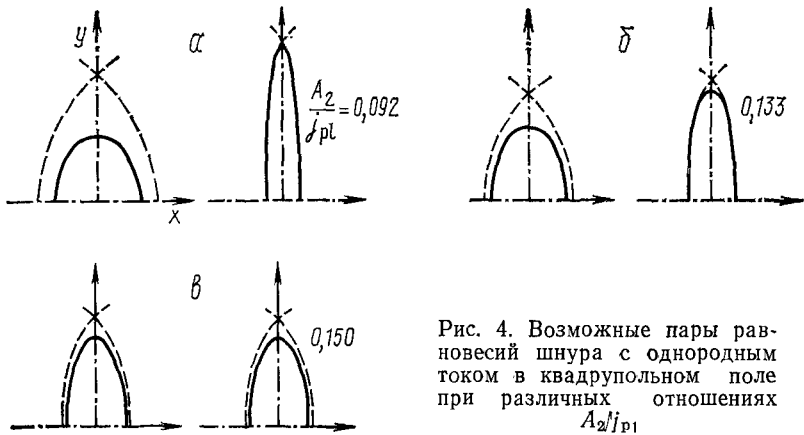


Рис. 4. Возможные пары равновесий шнура с однородным током в квадрупольном поле при различных отношениях  $A_2/j_{p1}$

ления тока в плазме. При наращивании внешнего поля сечение шнура сначала вытягивается. Затем по достижении некоторой величины критического поля  $A_{2, cr}$  [ $A_{2, cr} < 0,15j_{p1}(0)$ ,  $j_{p1}(0)$  — плотность тока в центре шнура] равновесие с таким распределением тока становится невозможным, и внешняя оболочка перестает удерживаться собственным полем тока. Границей плазмы при этом становятся внутренние магнитные поверхности шнура. Наконец, по достижении  $A_2$  критиче-

ского значения для плотности тока в центре,  $A_2 = 0,15j_{pl}(0)$ , внешнее поле полностью разрывает шнур.

Соотношение между критическим значением удерживающего поля и плотностью тока, которое было получено выше на основе точного решения уравнений равновесия, можно получить и из следующих качественных соображений. При увеличении квадрупольного поля сепаратриса внешних поверхностей приближается к плазменному шнуру. Критическому значению удерживающего поля соответствует попадание сепаратрисы на границу шнура. Положение  $X$  — точки сепаратрисы, где полоидальное поле обращается в нуль;  $\mathbf{V} = 0$ , можно оценить, приравняв собственное поле тока плазмы  $B_{pl} \approx 2\mathcal{Y}/c\sigma$  удерживающему полю  $B_x = \partial A_{ext}/\partial y = 4\pi y A_2/c$ . Отсюда для  $y$ -координаты  $X$ -точки приближенно имеем

$$y^2 = (a^2\lambda/2) (j_{pl}/A_2). \quad (3.10)$$

Считая в предельной ситуации  $y = \lambda a$ , имеем выражение для критического поля

$$A_{2, cr} = j_{pl}/2\lambda. \quad (3.11)$$

Хотя эти качественные соображения не определяют величину предельной вытянутости  $\lambda$ , при подстановке в (3.11)  $\lambda = 2,89$  получается хорошее согласие с точным значением.

Важным является то, что подобные качественные соображения дают возможность получить правильную функциональную зависимость между критическим удерживающим полем и плотностью тока в плазме, поэтому ими можно воспользоваться и для анализа влияния полей другой мультипольности на равновесие плазмы.

В мультипольном поле вида

$$A_s = (2\pi/c) A_m \rho^m \cos m\omega \quad (3.12)$$

сечение плазменного шнура в линейном приближении по возмущению приобретает форму

$$\rho = a + \xi \cos m\omega. \quad (3.13)$$

Здесь  $a$  — малый радиус шнура;  $\xi$  — амплитуда возмущения его границы, которая при однородной плотности тока  $j_{pl} = \text{const}$  связана с амплитудой удерживающего поля соотношением

$$A_m = \frac{\xi}{a^{m-1}} \frac{m-2}{m} j_{pl}. \quad (3.14)$$

Найдем теперь связь критической величины удерживающего поля с плотностью тока, пользуясь упомянутыми выше качественными соображениями. Считая для  $m > 2$  отклонение сечения от круглого малым даже для предельной ситуации, имеем

$$A_{m, cr} \approx j_{pl}/ma^{m-2}. \quad (3.15)$$

Формальная подстановка  $A_{m, cr}$  в (3.14) дает  $\xi/a = 1/(m - 1)$ , что оправдывает проделанную процедуру. Для  $m > 2$  в отличие от случая  $m = 2$  в выражение для критического поля входит размер плазменного шнура.

Выражение (3.15) позволяет рассмотреть процесс формирования плазменного шнура в заранее созданном удерживающем поле, играющем роль магнитной диафрагмы. В квадрульном поле замкнутая конфигурация может образоваться, только если плотность тока с самого начала превышает критическую  $j_{p1} > A_2/0,15$ . В полях с  $m \geq 3$  при любой плотности тока может образоваться замкнутая конфигурация. Если считать, что при наращивании тока в стационарном мультипольном поле токовый канал будет ограничиваться сепаратрисой, что обусловлено большими коэффициентами переноса вдоль магнитного поля, то можно сразу написать связь размера плазмы с величиной полного тока  $\mathcal{I}$  в шнуре:

$$a = (\mathcal{I}/\pi mA_m)^{1/m}. \quad (3.16)$$

Получающееся при этом распределение тока  $j_s(a)$  имеет вид

$$j_s(a) = \frac{1}{2\pi a} \frac{d\mathcal{I}}{da} = \frac{m^2}{2} A_m a^{m-2}. \quad (3.17)$$

Так в гексапольном поле,  $m = 3$ , плотность тока будет распределена линейно по радиусу:  $j_s(a) \sim a$ , в октупольном  $j_s(a) \sim a^2$  и т. д. Приведенный простой анализ хорошо соответствует численному моделированию с учетом процессов переноса [35].

### § 3.2. Равновесие шнура эллиптического сечения с винтовой симметрией

Уравнение равновесия (2.44) для функции винтового потока  $\Psi^*$  допускает явное решение только для случая вакуумных магнитных полей:  $r' = 0$ ,  $F' = 0$ . Для этого уравнения неизвестна система координат, допускающая разделение переменных, которая позволила бы путем шивки получить решение как вне, так и внутри плазменного шнура с током аналогично сделанному в § 1. Однако основную особенность равновесия шнура с током при винтовой симметрии можно ухватить, воспользовавшись длинноволновым пределом. В этом случае задача аналогична прямолинейной [уравнение (2.46)] и можно, в частности, воспользоваться координатами эллиптического цилиндра и получить решение для шнура эллиптического сечения с однородным током [36].

Пусть сечение характеризуется теми же параметрами, что и для прямолинейного шнура (см. § 3.1). При винтовой симметрии имеем

$$\Delta\Psi^* = \frac{2}{d^2(\operatorname{ch} 2u + \cos 2v)} \left( \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial v^2} \right) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} (j_{p1} - j_B), & u < u_0; \\ \frac{4\pi}{c} j_B, & u > u_0, \end{cases} \quad (3.18)$$

где  $j_{p1} = \text{const}$  — плотность тока в плазменном шнуре;  $\frac{4\pi}{c} j_B = \frac{2n}{mR} B_s = \text{const}$ . Решениями его внутри шнура являются

$$\begin{aligned} \Psi_i^* &= -\frac{4\pi}{c} (j_{p1} - j_B) \frac{d^2}{8} \left[ \text{ch } 2u - \text{ch } 2u_0 - \cos 2v + \frac{\text{ch } 2u}{\text{ch } 2u_0} \cos 2v \right] = \\ &= -\frac{4\pi}{c} (j_{p1} - j_B) \frac{\lambda^2 a^2}{2(\lambda^2 + 1)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 a^2} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

а вне шнура

$$\begin{aligned} \Psi_e^* &= -\frac{4\pi}{c} j_{p1} \frac{a^2}{8} \left[ 2(u - u_0) \text{sh } 2u_0 + \frac{\text{sh } 2u_0}{\text{ch } 2u_0} \text{sh } 2(u - u_0) \cos 2v \right] + \\ &+ \frac{4\pi}{c} j_B \frac{d^2}{8} \left[ \text{ch } 2u - \text{ch } 2u_0 - \cos 2v + \frac{\text{ch } 2u}{\text{ch } 2u_0} \cos 2v \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Фактически здесь к полученному в § 3.1 решению для  $A_i, A_e$  просто добавлена часть, связанная с наличием в правой части (3.18)  $j_B$ .

При выделении удерживающего поля  $\Psi_{\text{ext}}^*$  следует иметь в виду, что поток полного поля  $\Psi_e^*$  складывается из потоков собственного поля плазмы  $\Psi_{p1}^*$ , удерживающего поля  $\Psi_{\text{ext}}^*$ , создаваемого винтовыми обмотками, и потока продольного поля  $\Psi_B^*$  через винтовую перегородку:

$$\Psi_e^* = \Psi_{p1}^* + \Psi_{\text{ext}}^* + \Psi_B^*. \quad (3.21)$$

Вычитая из  $\Psi_e^*$  поток продольного поля

$$\Psi_B^* = \frac{4\pi}{c} j_B \frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{4\pi}{c} j_B \frac{d^2}{8} (\text{ch } 2u - \cos 2v) \quad (3.22)$$

и далее проводя для выделения  $\Psi_{\text{ext}}^*$  ту же процедуру, что и в § 3.1 получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ext}}^* &= -\frac{4\pi}{c} \frac{d^2}{8} \left[ j_{p1} \frac{\text{sh } 2u_0}{\text{ch } 2u_0} \exp(-2u_0) - j_B \frac{1}{\text{ch } 2u_0} \right] \text{ch } 2u \cos 2v = \\ &= \frac{\pi}{c} (y^2 - x^2) \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} \left[ \frac{2\lambda}{(\lambda + 1)^2} j_{p1} - j_B \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При  $j_B = 0$  ( $n = 0$ ) эта формула переходит в (3.7). Наличие создаваемого с  $\frac{4\pi}{c} j_B = \frac{2n}{mR} B_s$  и определяет специфику винтового равновесия шнура с током. Оно показывает, что в дополнение к силам собственного стягивания шнура и взаимодействия его тока с квадрупольным полем в винтовом равновесии участвует еще сила взаимодействия тока плазмы, текущего по винтовым линиям, с продольным магнитным полем  $B_s$  (рис. 5). При этом продольное поле берет на себя часть функций удерживающего поля, в результате чего амплитуда последнего уменьшается по сравнению с полем для прямолинейного шнура.



Для шнура с винтовой симметрией появляется возможность равновесия без удерживающего поля винтовых проводников. Для этого надо, чтобы

$$j_B = 2\lambda j_{pl} / (\lambda + 1)^2. \quad (3.24)$$

При  $\lambda \rightarrow 1$  это соотношение сводится к  $j_B = j_{pl}/2$ .

Отметим, что в данном примере обнаруживается связь теории равновесия и винтовой неустойчивости прямолинейного шнура круглого сечения. Действительно, если продольное поле таково, что  $j_B = j_{pl}/2$ , то шнур, имевший первоначально круглое сечение, будет находиться в безразличном равновесии по отношению к винтовым возмущениям с  $m = 2$ . Если продольное поле сильнее, так что  $j_B > j_{pl}/2$ , то любая деформация сечения шнура приведет к своему росту, так как при этом сила, связанная с продольным полем, будет превышать силу собственного стягивания плазмы. Соотношение  $j_B = j_{pl}/2$  соответствует левой границе зоны винтовой неустойчивости для шнура с однородным током:  $m - 1 < nq < m$  [ $q = (c/4\pi) (2B_s/Rj_{pl})$ ], так как

$$2j_B/j_{pl} = nq = 1. \quad (3.25)$$

Рассмотрим теперь конфигурацию магнитных поверхностей вне плазменного шнура. На большом расстоянии от границы, где собственное поле мало, функция потока имеет вид

$$\Psi_{e,\infty}^* = \Psi_B^* + \Psi_{ext}^* = \frac{\pi}{c} j_B [x^2 + y^2 + \epsilon_\infty (x^2 - y^2)], \quad (3.26)$$

где

$$\epsilon_\infty = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} \left[ 1 - \frac{2\lambda}{(\lambda + 1)^2} \frac{j_{pl}}{j_B} \right]. \quad (3.27)$$

Параметр  $\epsilon_\infty$  характеризует геометрию поверхностей вне шнура. При  $|\epsilon_\infty| > 1$  поверхности являются разомкнутыми, если же  $|\epsilon_\infty| < 1$ , то сечения поверхностей эллиптические и  $\epsilon_\infty = (\lambda_\infty^2 - 1)/(\lambda_\infty^2 + 1)$ , где  $\lambda_\infty$  — отношение полуосей эллипса. В зависимости от соотношения между  $j_{pl}$  и  $j_B$  возможны следующие типы конфигураций (рис. 6):

1. Случай сильного тока плазмы. Величина  $j_{pl}$  настолько велика, что  $|\epsilon_\infty| > 1$ . Продольное поле мало влияет на форму поверхностей, и конфигурация в сечении аналогична конфигурации прямолинейного шнура с трансляционной симметрией.

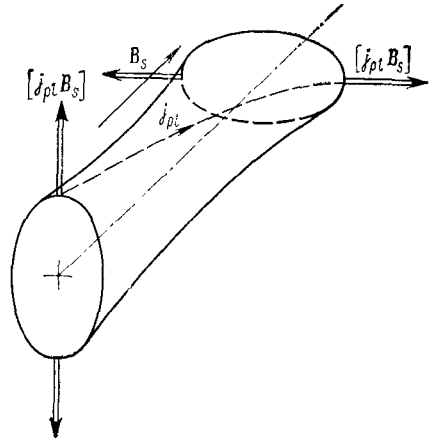


Рис. 5. Сила взаимодействия тока плазмы с продольным полем в шнуре с винтовой симметрией

2. Случай умеренного тока, когда  $|\epsilon_\infty| < 1$ , но в то же время  $j_{pl} > j_B$ . Все магнитные поверхности являются замкнутыми. Вблизи шнура поле  $\mathbf{V}^*$  направлено так же, как и поле тока плазмы, затем имеется замкнутая сепаратриса, внутри которой образовано два магнитных острова. За сепаратрисой магнитные поверхности опять близки по форме к эллипсам, но поле  $\mathbf{V}^*$  поменяло свое направление.

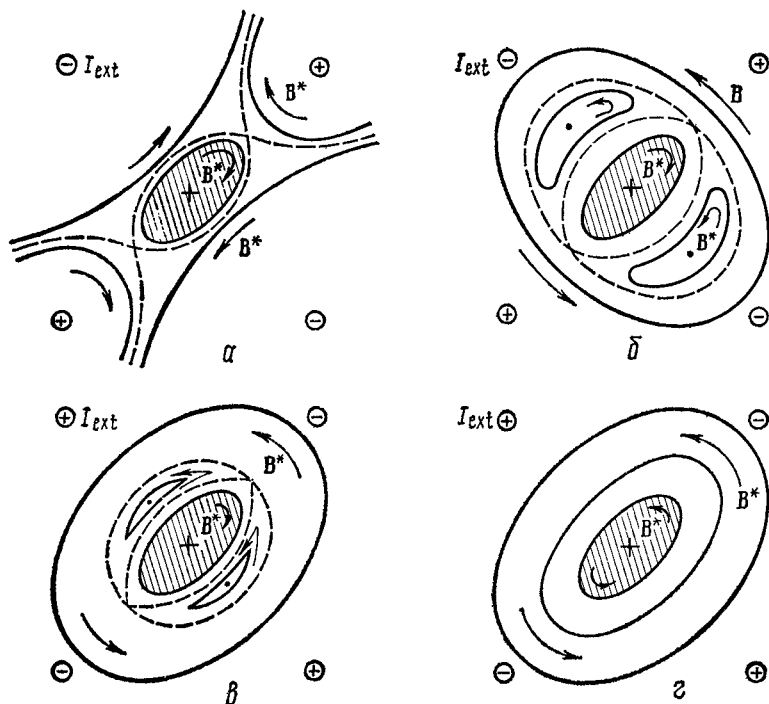


Рис. 6 Возможные типы равновесных конфигураций для прямолинейного шнура с винтовой симметрией:

*a* — случай сильного тока плазмы,  $|\epsilon_\infty| > 1$ ; *б* — равновесие при умеренном токе плазмы,  $-1 < \epsilon_\infty < 0$ , *в* — равновесие при умеренном токе плазмы,  $0 < \epsilon_\infty < 1, j_{pl} > j_B$ ; конфигурация неустойчива по отношению к винтовым модам; *г* — равновесие стеллараторного типа при слабом токе плазмы,  $j_{pl} < j_B$

В случае умеренного тока имеются две возможности: а) большая полуось внешних эллипсов перпендикулярна большой полуоси сечения шнура,  $\epsilon_\infty < 0$ ; б) большие полуоси параллельны,  $\epsilon_\infty > 0$ . Переход от случая «а» к случаю «б» соответствует смене знака удерживающего поля  $\Psi_{ext}^*$  (и пересечению границы устойчивости).

3) Случай слабого тока,  $j_{pl} < j_B$ . Магнитное поле  $\mathbf{V}^*$  всюду имеет направление, противоположное собственному полю тока плазмы. Магнитная конфигурация имеет простую структуру без сепаратрис. (Сепаратрисы появляются при учете опущенных в длинноволновом приближении членов).

В случае слабого тока собственное поле тока плазмы мало влияет на конфигурацию, и она определяется магнитным полем  $\Psi_B^*$  и полем винтовых обмоток  $\Psi_{\text{ext}}^*$ . Возможность создания замкнутых поверхностей в отсутствие продольного тока плазмы является качественной особенностью конфигураций с винтовой симметрией, на которой основана идея стелларатора с винтовыми обмотками.

Качественно картина винтового равновесия сохраняется и при других формах сечения плазменного шнура. Так, для однородного тока в плазме  $j_s = j_{p1} = \text{const}$ , если контур сечения шнура имеет вид

$$\rho = a + \xi \cos m\theta, \quad \theta = \omega - \kappa s, \quad (3.28)$$

удерживающее поле в линейном по  $\xi$  приближении будет равно:

$$\Psi_{\text{ext}}^* = \frac{\pi}{c} a^2 \frac{\rho^m}{a^m} \cos m\theta - \frac{2\xi}{a} \left[ \frac{m-1}{m} j_{p1} - j_B \right]. \quad (3.29)$$

Вне плазмы функция потока имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_e^* = \frac{\pi}{c} j_B \left[ \rho^2 - 2a\xi \frac{\rho^m}{a^m} \cos m\theta \right] - \frac{\pi}{c} j_{p1} a^2 \left[ \ln \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \frac{\xi}{a} \frac{\rho^m}{a^m} \cos m\theta \right] - \\ - \frac{\pi}{c} j_{p1} \frac{2\xi a}{m} \left( \frac{\rho^m}{a^m} - \frac{a^m}{\rho^m} \right) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Как и для случая  $m = 2$ , магнитная конфигурация вне плазмы может быть трех типов, соответствующих: 1) равновесию прямолинейного шнура с разомкнутой сепаратрисой, 2) равновесию с замкнутой сепаратрисой и магнитными островами, 3) стеллараторному равновесию с простой топологией.

### § 3.3. Плазменный тор круглого сечения

В тороидальном случае аналитическое решение уравнения равновесия (2.21) можно получить для квазиоднородного тока [38], когда

$$2\pi c \frac{dp}{d\Psi} = A = \text{const}, \quad \frac{1}{c} \frac{dF^2}{d\Psi} = B = \text{const}, \quad (3.31)$$

а сечение шнура имеет круглое сечение, при этом можно воспользоваться тороидальными координатами  $\eta$ ,  $\omega$ ,  $\xi$ ,

$$r = R_0 \text{sh } \eta / (\text{ch } \eta - \cos \omega), \quad z = R_0 \sin \omega (\text{ch } \eta - \cos \omega), \quad (3.32)$$

и совместить границу плазмы с поверхностью  $\eta = \eta_0$ . Внутри плазмы  $\eta > \eta_0$ , вне ее  $\eta < \eta_0$ . На оси тороидальной системы координат  $r = R_0$ ,  $z = 0$  координата  $\eta = \infty$ , а на оси симметрии  $r = 0$  и при  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$  величина  $\eta = 0$ . Малый  $a$  и большой  $R$  радиусы тора равны:

$$a = R_0 / \text{sh } \eta_0, \quad R = R_0 \text{cth } \eta_0. \quad (3.33)$$

Плотность тока при условиях (3.31) однородна в направлении оси  $z$ :

$$j_s = Ar + B/r. \quad (3.34)$$

В тороидальных координатах можно разделить переменные, если  $\Psi$  выразить через вспомогательную функцию  $F(\eta, \omega)$ :

$$\Psi(\eta, \omega) = F(\eta, \omega) / \sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)}, \quad (3.35)$$

для которой уравнение (2.21) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \operatorname{cth} \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2} + \frac{1}{4} F = \\ & = - \frac{32\pi^2 R_0^2}{c} \frac{r}{[2(\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)]^{3/2}} j_s = S(\eta, \omega). \end{aligned} \quad (3.36)$$

При модельных  $p'$  ( $\Psi$ ) и  $FF'$  ( $\Psi$ ) (3.31) правая часть  $S(\eta, \omega)$  (3.36) известна. Если  $F(\eta, \omega)$ ,  $S(\eta, \omega)$  разложить в ряд Фурье:

$$F(\eta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\eta) \cos n\omega; \quad (3.37)$$

$$S(\eta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\eta) \cos n\omega, \quad (3.38)$$

то для коэффициентов  $F_n(n\eta)$  получим уравнения

$$\frac{d^2 F_n}{d\eta^2} - \operatorname{cth} \eta \frac{dF_n}{d\eta} - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) F_n = S_n(\eta), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.39)$$

Линейно-независимыми решениями для соответствующих однородных уравнений являются функции Фока

$$g_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)} \cos n\omega d\omega; \quad (3.40)$$

$$j_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{ch} t)} \operatorname{ch} nt dt, \quad (3.41)$$

регулярные во всем пространстве, за исключением  $\eta = 0$  для  $g_n(\eta)$  и  $\eta = \infty$  для  $f_n(\eta)$ . Функции Фока выражаются через присоединенные функции Лежандра

$$\begin{aligned} (n^2 - 1/4) f_n(\eta) &= \operatorname{sh} \eta P_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \eta), \\ (n^2 - 1/4) g_n(\eta) &= \operatorname{sh} Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} \eta). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Функции  $S_n(\eta)$  в правой части (3.39) для модели квазиоднородного тока (3.34) можно записать в виде

$$S_n(\eta) = \begin{cases} \frac{32\pi^2 R_0^2}{c} \left[ \frac{8AR_0^2}{15} \operatorname{sh} \eta \left( \frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \left( \frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \left( \frac{g'_n(\eta)}{\operatorname{sh} \eta} \right)' \right)' \right)' \right] + \\ + \frac{2B}{\operatorname{sh}^2 \eta} \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) g_n(\eta), & \eta > \eta_0; \\ 0, & \eta < \eta_0, \end{cases} \quad (3.43)$$

$n = 1, 2, 3 \dots$

Для  $n = 0$  необходимо удвоить правую часть в (3.43). Вронскиан функций  $f_n, g_n$

$$f_n g_n' - g_n f_n' = \text{sh } \eta / [\pi (n^2 - 1/4)]. \quad (3.44)$$

Имея явные решения однородных уравнений (3.39), можно составить выражения для потока  $\Psi$  полного поля равновесной конфигурации, а также для потоков собственного  $\Psi_{pl}$  и удерживающего  $\Psi_{ext}$  полей:

$$\begin{aligned} \Psi(\eta, \omega) = & \frac{\pi}{\sqrt{2(\text{ch } \eta - \cos \omega)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \left\{ g_n(\eta) \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{f_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt + \right. \\ & \left. + f_n(\eta) \int_{\eta}^{\infty} \frac{g_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt - g_n(\eta) \frac{f_n(\eta_0)}{g_n(\eta_0)} \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{g_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt \right\} \cos n\omega; \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{pl}(\eta, \omega) = & \frac{\pi}{\sqrt{2(\text{ch } \eta - \cos \omega)}} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 1/4) \left\{ g_n(\eta) \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{f_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt + \right. \\ & \left. + f_n(\eta) \int_{\eta}^{\infty} \frac{g_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt \right\} \cos n\omega; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{ext}(\eta, \omega) = & \frac{-\pi}{\sqrt{2(\text{ch } \eta - \cos \omega)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{f_n(\eta_0)}{g_n(\eta_0)} g_n(\eta) \times \\ & \times \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{g_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt \cos n\omega. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Функция  $\Psi(\eta, \omega)$  регулярна внутри шнура, и, в частности, на оси системы координат,  $\eta = \infty$ , и равна нулю на границе плазмы,  $\eta = \eta_0$ ,  $\Psi(\eta_0, \omega) = 0$ . Поток поля плазмы  $\Psi_{pl}(\eta, \omega)$  также регулярен внутри шнура и равен нулю при  $\eta = 0$ , т. е. при  $r = 0$  и при  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ . Вне плазмы,  $\eta < \eta_0$ , коэффициент при  $g_n(\eta)$  в (3.46) обращается в нуль и  $\Psi_{pl}$  выражается в виде ряда по убывающим при  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$  функциям  $f_n(\eta)$ :

$$\begin{aligned} & \Psi_{pl}(\eta, \omega) |_{\eta < \eta_0} = \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{2(\text{ch } \eta - \cos \omega)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n^2 - \frac{1}{4} \right) f_n(\eta) \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{g_n(t) S_n(t)}{\text{sh } t} dt \cos n\omega. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Помимо того, что использование тороидальных координат позволяет получить решение при произвольном значении аспектного отношения  $R/a$ , оно дает вид функций  $f_n(\eta)$ , убывающих при  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ , через которые выражается собственное поле любой ограниченной осе-

симметричной конфигурации. Знание их важно при использовании метода разложения по кривизне,  $\sqrt{(r-R)^2 + z^2}/R \ll 1$ , так как позволяет в выражениях, справедливых только вблизи оси системы координат, разделить части, убывающие и растущие при  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ . Это, например, нельзя сделать, пользуясь только разложением по кривизне.

Решения для тороидального шнура круглого сечения были проанализированы с использованием ЭВМ в работе [39]. Типичная равновесная конфигурация показана на рис. 7. Внешние магнитные поверхности тороидального шнура имеют сепаратрису, разделяющую область замкнутых магнитных поверхностей от разомкнутых. Сепаратриса имеет X-точку (в которой полоидальное

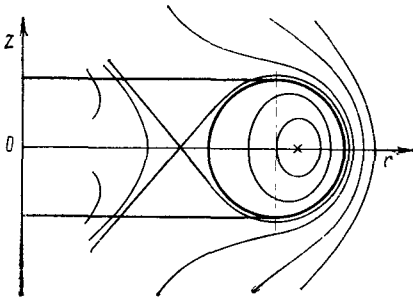


Рис. 7. Магнитные поверхности для тороидального шнура круглого сечения,  $R/a=3,7$ ,  $\beta_{\mathcal{I}}=4$  [39]

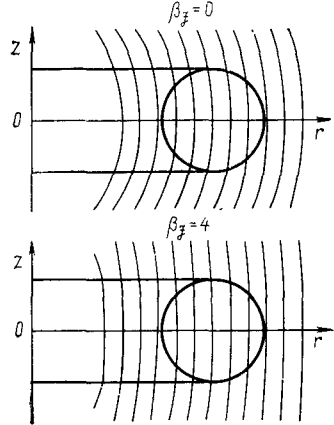


Рис. 8. Форма силовых линий удерживающего магнитного поля для шнура круглого сечения,  $R/a=3,7$

поле обращается в нуль,  $\mathbf{B}_p = 0$ ), расположенную на внутренней стороне тора. В работе [39] было сделано сравнение аналитических формул, получающихся в приближении большого аспектного отношения,  $R/a \gg 1$ , ( $\exp(\eta_0) \gg 1$ ), с точным решением.

Обозначим  $\mathcal{I}$  — полный ток плазмы:

$$\mathcal{I} = \int j_s dS_{\xi} = \int (Ar + B/r) dr dz, \quad (3.49)$$

а  $\bar{\beta}_p$  — параметр, характеризующий давление плазмы:

$$\bar{\beta}_p = \frac{1}{\mathcal{I}} \int Ar dS_{\xi} = \frac{2\pi c \int \frac{dp}{d\Psi} dS_{\xi}}{\mathcal{I}}. \quad (3.50)$$

Для шнура круглого сечения и большого аспектного отношения  $\bar{\beta}_p$  равно  $\beta_p$  (см. § 2.6). При увеличении  $\bar{\beta}_p$  X-точка сепаратрисы приближается к границе плазмы и при

$$\bar{\beta}_p = R/a + 1/2 \quad (3.51)$$

сепаратриса попадает на границу шнура. Как показывает сравнение с точным расчетом, формула (3.51) дает погрешность не более 10% вплоть до  $R/a = 1,5$ .

Удерживающее поле (рис. 8) для шнура круглого сечения характеризуется своей средней частью

$$B_{\perp} = -B_{z,\text{ext}} = \frac{\mathcal{F}}{cR} \left( \ln \frac{8R}{a} + \bar{\beta}_p - \frac{5}{4} \right) \quad (3.52)$$

и показателем спада

$$n = - \frac{r}{B_{z,\text{ext}}} \left. \frac{dB_{z,\text{ext}}}{dr} \right|_{r=R_0} = \frac{3}{4} \frac{\ln \frac{8R}{a} - \frac{17}{12}}{\ln \frac{8R}{a} + \bar{\beta}_p - \frac{5}{4}}. \quad (3.53)$$

Эти формулы имеют такую же точность, как и (3.51).

### § 3.4. Компактный тороидальный шнур. Вихрь Хилла

Простые точные решения для квазиоднородного тока можно получить, пользуясь сферическими координатами, а также координатами вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. В первом случае граница тороидального шнура будет представлять сферу, а во втором, и третьем — эллипсоиды вращения, полуоси которых обозначим  $l_r$  и  $l_z$ , а их отношение  $l_z/l_r = \lambda$ .

Пусть распределение тока имеет вид

$$j_s = 2\pi c \frac{dp}{d\Psi} r = Ar = -\frac{15}{8} \frac{c}{\pi l_r^2} B_0 r. \quad (3.54)$$

Величина  $B_0 = \text{const}$ , имеющая размерность магнитного поля, которую в дальнейшем будем использовать вместо  $A$ , как будет видно из дальнейшего, равна амплитуде удерживающего поля для сферической конфигурации  $l_z = l_r$  ( $\lambda = 1$ ).

Внутреннее решение уравнения равновесия (2.21), охватывающее три рассматриваемых случая, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \frac{4\pi^2}{c} A l_r^2 \frac{\lambda^2}{4\lambda^2 + 1} r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{l_r^2} - \frac{z^2}{l_z^2} \right) = \\ &= -\pi r^2 B_0 \frac{15}{2} \frac{\lambda^2}{4\lambda^2 + 1} \left( 1 - \frac{r^2}{l_r^2} - \frac{z^2}{l_z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Применим теперь метод разделения переменных для отыскания полного решения уравнения (2.21).

В сферических координатах  $\rho$ ,  $v$ ,  $\zeta$ ,

$$r = \rho \sin v, \quad z = \rho \cos v \quad (3.56)$$

уравнение (2.21) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{\sin v}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sin v} \frac{\partial \Psi}{\partial v} &= -\frac{8\pi^2}{c} j_s r = \\ &= -\frac{8\pi^2}{c} A r^2 = 2\pi r^2 B_0 \frac{15}{2l_r^2}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Общее решение для вакуумного поля в сферических координатах выражается через производные  $\dot{P}_n(t)$ ,  $\dot{Q}_n(t)$  функций Лежандра  $P_n(t)$ ,  $Q_n(t)$ :

$$\dot{P}_n(t) \equiv \frac{dP_n(t)}{dt}, \quad \dot{Q}_n(t) = \frac{dQ_n(t)}{dt}, \quad (3.58)$$

$$\dot{Q}_n \frac{d\dot{P}_n}{dt} - \dot{P}_n \frac{d\dot{Q}_n}{dt} = -\frac{n(n+1)}{(t^2-1)^2},$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{vac}} &= \rho^2 \sin^2 v \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \rho^{n-1} + \right. \\ &\left. + B_n \frac{1}{\rho^{n+2}} \right) \dot{P}_n(\cos v) + A_0 \rho \cos v. \end{aligned} \quad (3.59)$$

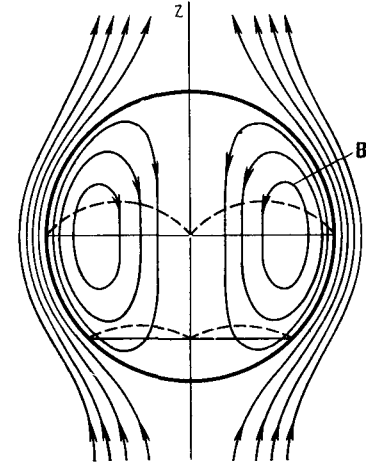


Рис. 9. Равновесная конфигурация для шнура со сферической границей [13]. Прерывистая линия показывает распределение давления

Если принять сферическую поверхность  $\rho = l_r$  за границу плазменного шнура, то решение записывается в виде [13]

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i &= \frac{3}{2} \pi B_0 \rho^2 \sin^2 v (\rho^2/l_r^2 - 1); \\ \Psi_e &= \pi B_0 \rho^2 \sin^2 v (1 - l_r^3/\rho^3). \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Магнитные поверхности этой конфигурации показаны на рис. 9. Из выражения для  $\Psi_e$  видно, что удерживающее поле для сферической конфигурации является однородным:

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_z \mathbf{e}_z = B_0 \mathbf{e}_z. \quad (3.61)$$

Отметим, что такая равновесная конфигурация имеет свою аналогию в гидродинамике, где соответствующее ламинарное течение называется вихрем Хилла.

В координатах вытянутого эллипсоида вращения ( $\lambda > 1$ )  $u$ ,  $v$ ,  $\zeta$ ,

$$r = d \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = d \operatorname{ch} u \cos v \quad (3.62)$$



уравнение (2.21) приобретает вид

$$\frac{1}{d^2 (\text{sh}^2 u + \sin^2 v)} \left[ \text{sh } u \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\text{sh } u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \sin v \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sin v} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right] = -\frac{8\pi^2}{c} j_s r = 15 \pi \frac{r^2}{l_r^2} B_0. \quad (3.63)$$

Функция потока вакуумного поля записывается в этих координатах в виде

$$\Psi_{\text{vac}} = d^2 \text{sh}^2 u \sin^2 v \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \dot{P}_n(\text{ch } u) + B_n \dot{Q}_n(\text{ch } u)] \dot{P}_n(\cos v) + A_0 d \text{ch } u \cos v. \quad (3.64)$$

Если принять координатную поверхность  $u = u_0$  за границу плазмы,

$$l_r = d \text{sh } u_0, \quad l_z = d \text{ch } u_0, \quad d^2 = l_z^2 - l_r^2, \quad (3.65)$$

то внутреннее и внешнее решения записываются в виде

$$\Psi_i = \frac{15}{2} \pi B_0 d^2 \text{sh}^2 u \sin^2 v \lambda^2 \left\{ \frac{\text{ch}^2 u}{\text{ch}^2 u_0} \cos^2 v - \frac{\dot{P}_3(\text{ch } u)}{\dot{P}_3(\text{ch } u_0)} \left( \cos^2 v - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \right\};$$

$$\Psi_e = \frac{15}{2} \pi B_0 d^2 \text{sh}^2 u \sin^2 v \lambda^2 \frac{\text{sh}^4 u_0}{\text{ch } u_0} \left\{ \frac{\cos^2 v - 1/5}{6(5 \text{ch}^2 u_0 - 1)} [\dot{Q}_3(\text{ch } u_0) \dot{P}_3(\text{ch } u) - \dot{P}_3(\text{ch } u_0) \dot{Q}_3(\text{ch } u)] + \frac{1}{5} [\dot{Q}_1(\text{ch } u) - \dot{Q}_1(\text{ch } u_0)] \right\}. \quad (3.66)$$

В явной записи

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_3(t) &= \frac{3}{2} (5t^2 - 1); \\ \dot{Q}_1(t) &= \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{t}{t^2-1}; \\ \dot{Q}_3(t) &= \frac{3}{4} (5t^2 - 1) \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{3}{2} \frac{(5t^2-1)t}{t^2-1} + \frac{5t}{(t^2-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Удерживающее поле для вытянутого эллипсоида

$$\Psi_{\text{ext}} = \frac{15}{2} \pi B_0^2 d^2 \text{sh}^2 u \sin^2 v \lambda^2 \frac{\text{sh}^4 u_0}{\text{ch } u_0} \left\{ \frac{\cos^2 v - 1/5}{6(5 \text{ch}^2 u_0 - 1)} \dot{Q}_3(\text{ch } u_0) \times \right. \\ \left. \times \dot{P}_3(\text{ch } u) - \frac{1}{5} \dot{Q}_1(\text{ch } u_0) \right\}. \quad (3.68)$$

Поток удерживающего поля можно записать в виде суммы

$$\Psi_{\text{ext}} = -\pi r^2 B_0 \left[ \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) \frac{r^2 - 4z^2}{2l_r^2} \right], \quad (3.69)$$

в которой первое слагаемое соответствует однородному полю, а второе — квадрупольному. Функции  $\varphi_1(\lambda)$  и  $\varphi_2(\lambda)$  при  $\lambda > 1$  равны:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= \frac{15}{2} \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}) - \frac{1}{2} \lambda + \lambda \frac{\lambda^2-1}{4\lambda^2+1} \right]; \\ \varphi_2(\lambda) &= \frac{15}{4} \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)^2} \left[ \frac{3}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}) - \frac{3}{2} \lambda + 5\lambda \frac{\lambda^2-1}{4\lambda^2+1} \right]. \end{aligned} \right\} (3.70)$$

Удерживающее магнитное поле при этом имеет вид

$$\left. \begin{aligned} B_{z,\text{ext}} &= -B_0 \varphi_1(\lambda) - B_0 \varphi_2(\lambda) \frac{r^2 - 2z^2}{l_r^2}; \\ B_{r,\text{ext}} &= -B_0 \varphi_2(\lambda) \frac{2rz}{l_r^2}. \end{aligned} \right\} (3.71)$$

В координатах сплюснутого эллипсоида вращения ( $\lambda < 1$ )  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $\zeta$ ,  
 $r = d \operatorname{ch} \omega \sin \nu$ ,  $z = d \operatorname{sh} \omega \cos \nu$ . (3.72)

Уравнение (2.21) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2 (\operatorname{sh}^2 \omega + \cos^2 \nu)} \left[ \operatorname{ch} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\operatorname{ch} \omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} + \sin \nu \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\sin \nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \right] = \\ = -\frac{8\pi^2}{c} j_s r = 15 \pi \frac{r^2}{l_r^2} B_0. \end{aligned} (3.73)$$

Функция потока вакуумного поля в общем случае представляет ряд:

$$\Psi_{\text{vac}} = d^2 \operatorname{ch}^2 \omega \sin^2 \nu \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \dot{P}_n(i \operatorname{sh} \omega) + B_n \frac{1}{i} \dot{Q}_n(i \operatorname{sh} \omega) \right] \dot{P}_n(\cos \nu) + \\ + A_0 d \operatorname{sh} \omega \cos \nu. (3.74)$$

Считая, что  $\omega = \omega_0$  является поверхностью плазмы,

$$l_r = d \operatorname{ch} \omega_0, \quad l_z = d \operatorname{sh} \omega_0, \quad d^2 = l_r^2 - l_z^2, (3.75)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i &= \frac{15}{2} \pi B_0 d^2 \operatorname{ch}^2 \omega \sin^2 \nu \lambda^2 \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2 \omega}{\operatorname{sh}^2 \omega_0} \cos^2 \nu - \frac{\dot{R}_3(i \operatorname{sh} \omega)}{\dot{P}_3(i \operatorname{sh} \omega_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \cos^2 \nu - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \right\}; \\ \Psi_e &= \frac{15}{2} \pi B_0 d^2 \operatorname{ch}^2 \omega \sin^2 \nu \lambda^2 \frac{\operatorname{ch}^4 \omega_0}{\operatorname{sh} \omega_0} \left\{ \frac{\cos^2 \nu - 1/5}{6(5 \operatorname{sh}^2 \omega_0 + 1)} i \times \right. \\ &\quad \left. \times [\dot{P}_3(i \operatorname{sh} \omega_0) \dot{Q}_3(i \operatorname{sh} \omega) - \dot{Q}_3(i \operatorname{sh} \omega_0) \dot{P}_3(i \operatorname{sh} \omega)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5i} [\dot{Q}_1(i \operatorname{sh} \omega_0) - \dot{Q}_3(i \operatorname{sh} \omega)] \right\}. \end{aligned} \right\} (3.76)$$

Удерживающее поле  $\Psi_{\text{ext}}$  для сплюснутого эллипсоида вращения, которое легко выделяется из  $\Psi_e$ , как и в предыдущем случае, пред-

ставляет сумму однородного и квадрупольного полей (3.69), (3.71). Функции  $\varphi_1(\lambda)$  и  $\varphi_2(\lambda)$  при  $\lambda < 1$  являются аналитическим продолжением формул (3.70):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= \frac{15}{2} \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \left[ \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \lambda + \lambda \frac{\lambda^2-1}{4\lambda^2+1} \right]; \\ \varphi_2(\lambda) &= \frac{15}{4} \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)^2} \left[ \frac{3}{2\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \lambda + 5\lambda \frac{\lambda^2-1}{4\lambda^2+1} \right]. \end{aligned} \right\} (3.77)$$

На рис. 10 показан вид функций  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  в зависимости от параметра  $\varepsilon = (\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 + 1)$ .

Как и для прямолинейного плазменного шнура, здесь также имеется критическая величина квадрупольного поля, выше которого равновесие становится невозможным. При  $\lambda \rightarrow \infty$  рассмотренная конфигурация переходит в  $\theta$ -пинч с обращенным полем. В этом случае удерживающее поле, как и для сфероидальной конфигурации, является чисто однородным и равно:

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_z \mathbf{e}_z = \frac{15}{8} B_0 \mathbf{e}_z. \quad (3.78)$$

В противоположном случае,  $\lambda \rightarrow 0$ , конфигурация представляет собой тонкий диск с распределенным током и удерживающее магнитное поле в плоскости  $z = 0$  имеет вид

$$B_{z, \text{ext}} = \frac{2\mathcal{I}}{cl_r} \left[ -\frac{3}{8} \pi^2 + \frac{9}{16} \pi^2 \frac{r^2}{l_r^2} \right], \quad (3.79)$$

где  $\mathcal{I}$  — полный ток в плазме.

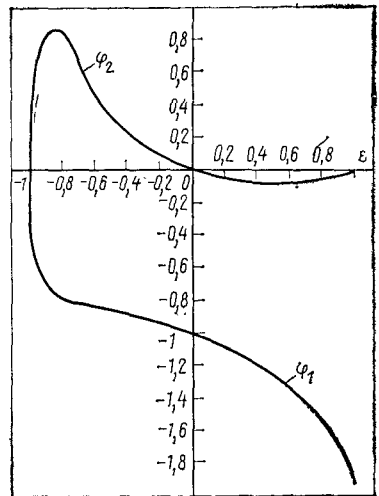


Рис. 10. Амплитуды однородного  $\varphi_1(\varepsilon)$  и квадрупольного  $\varphi_2(\varepsilon)$  удерживающих полей для компактного тороидального шнура с границей в виде эллипсоида вращения,  $\varepsilon = (\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 + 1)$ ,  $\lambda = l_z / l_r$

### § 3.5. Магнитостатические задачи, связанные с равновесием плазмы

К теории равновесия плазмы в тороидальных системах естественным образом примыкает ряд задач магнитостатики. В данном параграфе мы опишем решение некоторых из них для осесимметричных систем.

**1. Оптимизация формы катушек тороидального поля.** В системах с сильным продольным полем типа токамак, стелларатор (а также тороидальных магнитных накопителей) катушки продольного поля являются одним из наиболее напряженных элементов конструкции. Наиболее просты в изготовлении применяемые в настоящее время катушки круглого сечения. Однако представляют интерес возможность изменения их формы для оптимизации некоторых характеристик тороидального соленоида. В частности, можно поставить вопрос о выборе такого контура катушек, при котором усилия, связанные с давлением магнитного поля, компенсировались бы только натяжением проводника [40]. Если соленоид многovitковый, то это требование эквивалентно условию

$$T/\rho = (B_s^2/8\pi)2\pi r, \quad (3.80)$$

где  $T$  — суммарная сила натяжения проводников, а  $\rho$  — радиус кривизны контура меридионального сечения. Учитывая зависимость продольного поля от радиуса, получаем уравнение для радиуса кривизны контура

$$\rho = Cr, \quad C = \text{const}. \quad (3.81)$$

Аналогичное требование механического равновесия можно поставить для одновиткового соленоида, который допускает натяжения в тороидальном направлении. При условии одинаковых натяжений в полоидальном и тороидальном направлениях вместо (3.80) в этом случае будем иметь

$$T(k_1 + k_2) = B_s^2 r/4, \quad (3.82)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны тороидальной оболочки:

$$k_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{z'}{r\sqrt{1+z'^2}} \quad (3.83)$$

[ $z = z(r)$  — уравнение контура сечения].

Линии, удовлетворяющие уравнениям (3.81) ( $l$ -кривая), (3.82) ( $s$ -кривая), изображены на рис. 11. Отметим, что по форме семейство  $l$ -кривых совпадает с траекториями движения заряженной частицы, имеющей только полоидальную составляющую скорости  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_z \mathbf{e}_z$ , в вакуумном тороидальном поле  $\mathbf{B} = B_s \mathbf{e}_s$ . Действительно, условие равенства центробежной силе Лоренца в поле  $B_s \sim 1/r$  сводится к уравнению (3.81). Кривые не являются замкнутыми, и это отражает тот факт, что сделать соленоид с чисто тороидальным полем, в котором давление магнитного поля полностью компенсируется натяжением проводников, невозможно. Необходима дополнительная внешняя конструкция, которая воспринимала бы силу сжатия соленоида к оси симметрии. В качестве контура катушек может быть взята отдельная петля, которая образуется кривой, показанной на рис. 11, в результате ее самопересечения. При этом сила стягивания соленоида к оси симметрии должна компенсироваться на.

тяжением на внешнем обводе соленоида (рис. 12, а). Другая возможность состоит в соединении ближайших к оси симметрии точек кривых прямолинейным отрезком (рис. 12, б). В этом случае сила стягивания к оси, которая действует на прямолинейный участок, должна восприниматься центральной колонной.

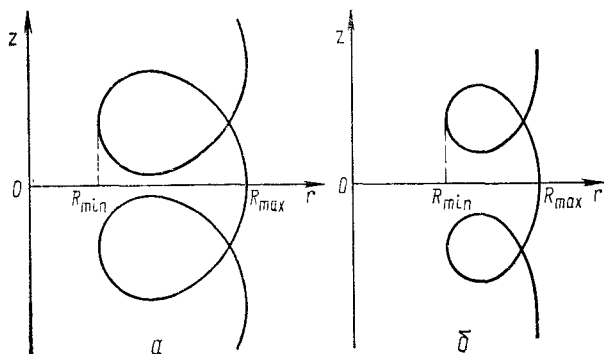


Рис. 11. Кривые  $z(r)$  для оптимальных контуров катушек продольного поля: а —  $l$ -кривая, являющаяся решением уравнения (3 81), при  $(R_{\max} - R_{\min}) / (R_{\max} + R_{\min}) = 0,5$ ; б —  $s$ -кривая, определяемая уравнением (3 82), при  $(R_{\max} - R_{\min}) / (R_{\max} + R_{\min}) = 0,3$

Компенсация давления магнитного поля натяжением проводника и тем самым устранение изгибающих усилий привлекательны для создания сверхпроводящих систем, в которых нежелательно относительное перемещение токонесущих элементов. В отсутствие изгибающих

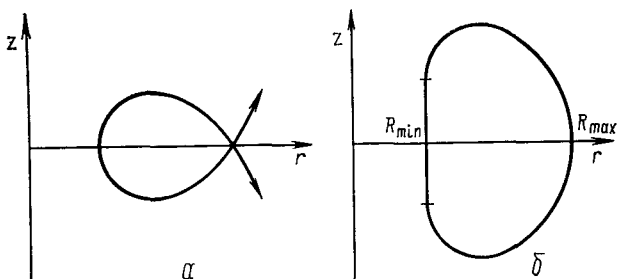


Рис. 12. Возможные варианты использования  $l$ -кривых в качестве контуров катушек продольного поля:

а — контур катушки в виде петли  $l$ -кривой; б — контур катушки с прямолинейным внутренним участком

моментов относительные сдвиги слоев сверхпроводника оказываются величинами второго порядка малости по отношению к общей деформации конструкции, возникающей при наращивании магнитного поля. Как следует из изложенного, даже в оптимизированных тороидальных соленоидах такую компенсацию давления можно осуществить

только на криволинейных участках контура сечения, и тем самым не удается полностью избавиться от сдвиговых усилий в толще проводника.

Отметим, что рассмотренной механической оптимизации тороидальных соленоидов эквивалентна задача о получении заданной энергии магнитного поля при минимальной длине контура сечения катушки, либо при минимальной поверхности соленоида [41]. Решением задачи в первой постановке (минимальная длина контура) является  $l$ -контур, определяемый уравнением (3.80), а во второй (минимальная поверхность соленоида) —  $s$ -контур, соответствующий уравнениям (3.82), (3.83).

**2. Распределение тока в сверхпроводящем торе.** В тороидальном сверхпроводнике ток распределен по поверхности таким образом, что внутри сверхпроводника магнитное поле отсутствует,  $\mathbf{B} = 0$ . В осесимметричном случае магнитное поле, создаваемое продольным поверхностным током на внутренней стороне контура  $L$  сечения тора, можно записать в виде

$$B_{\tau l}(l) = -\frac{2\pi}{c} i_s(l) + \oint_L b_{\tau}(l; l') i_s(l') dl', \quad (3.84)$$

где  $B_{\tau l}(l)$  — тангенциальная компонента поля, а  $b_{\tau}(l; l')$  — тангенциальная компонента поля в точке  $l$  от кольца с единичным током проходящего через точку  $l'$  контура:

$$b_{\tau}(l; l') = b_r(l; l') n_z(l) - b_z(l; l') n_r(l); \quad (3.85)$$

$\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к контуру; а  $b_r(l; l')$ ,  $b_z(l; l')$  могут быть вычислены по формулам

$$b_r(r, z; r', z') = \frac{2}{c} \frac{z-z'}{r \sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \left[ -K(k) + \frac{r'^2 + r^2 + (z-z')^2}{(r-r')^2 + (z-z')^2} E(k) \right]; \quad (3.86)$$

$$b_z(r, z; r', z') = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \left[ K(k) + \frac{r'^2 - r^2 - (z-z')^2}{(r-r')^2 + (z-z')^2} E(k) \right], \quad (3.87)$$

$K(k)$ ,  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы;

$$k^2 = \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}. \quad (3.88)$$

Учитывая, что

$$\oint_L b_{\tau}(l'; l) dl' = \frac{2\pi}{c}, \quad (3.89)$$

соотношение (3.84) можно записать в виде

$$B_{\tau i}(l) = \oint_L [b_{\tau}(l; l') i_s(l') - b_{\tau}(l'; l) i_s(l)] dl'. \quad (3.90)$$

Выражение (3.90) удобно тем, что в подынтегральном выражении исключена особенность при  $l' \rightarrow l$ , и поэтому интеграл допускает непосредственное использование стандартных формул численного интегрирования.

Распределение тока  $i_s^0(l)$  в сверхпроводящем торе при отсутствии источников поля вне тора определяется уравнением (3.90) при  $B_{\tau i} = 0$ . При таком распределении тока поток магнитного поля проходит только через отверстие тора, а внутри тора магнитное поле полностью отсутствует.

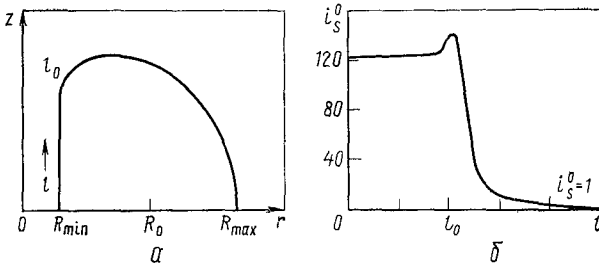


Рис. 13. Контур сечения тора в виде  $l$ -контура с прямолинейным участком,  $(R_{\max} - R_{\min}) / (R_{\max} + R_{\min}) = 0,7$  (а) и распределение тока сверхпроводника  $i_s^0(l)$  (б). Показана верхняя половина тора. На внешней стороне тора  $z=0$ ,  $r = R_{\max}$ , плотность тока  $i_s^0(l)$  нормирована на 1

Подобная конфигурация интересна как вариант индуктора, служащего для возбуждения тока в плазменном шнуре и не создающего в то же время рассеянных полей в области плазмы. Численный расчет распределения тока на основе уравнения (3.90) был выполнен в работах [42, 43]. На рис. 13 приведено распределение  $i_s^0(l)$  для тора, по форме совпадающее с  $l$ -контуром с  $(R_{\max} - R_{\min}) / (R_{\max} + R_{\min}) = 0,7$ .

При  $B_{\tau i}(l) \neq 0$  уравнение (3.90) определяет распределение тока  $i_s(l)$ , задающего внутри тора заданное поле. Решение  $i_s(l)$  является не единственным, так как добавление тока сверхпроводника  $i_s^0(l)$  не меняет поля внутри тора. При  $B_{\tau i} = -B_{\tau, \text{ext}}$ , где  $B_{\tau, \text{ext}}$  — тангенциальная компонента поля внешних источников, соотношение (3.90) дает распределение тока в сверхпроводнике, помещенном в поле  $B_{\text{ext}}$  внешних источников.

Задачу о распределении плотности тока сверхпроводника  $i_s^0$  можно также решить, исходя из условия постоянства функции потока на поверхности тора:

$$\oint_L \Psi_0(l; l') i_s^0(l') dl' = \text{const}, \quad (3.91)$$

где  $\Psi_0(l, l')$  — значение функции потока в точке  $l$  от единичного кольцевого тока, проходящего через точку  $l'$ -контура:

$$\Psi_0(r, z; r', z') = \frac{8\pi}{c} \sqrt{\frac{rr'}{k^2}} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right]. \quad (3.92)$$

Уравнение (3.91) относится к классу интегральных уравнений Фредгольма I рода и является плохо обусловленным для численного интегрирования. Однако наличие особенности (логарифмической) при  $l \rightarrow l'$  в ядре  $\Psi_0(l; l')$  упрощает регуляризацию этого уравнения.

Укажем здесь же метод решения задачи об экранировании поля источников, расположенных внутри тороидальной оболочки (кожуха), поверхностными токами  $i_s$  этой оболочки. Уравнение, определяющее распределение  $i_s$ , можно получить, приравняв нулю тангенциальную компоненту поля на внешней поверхности тора:

$$B_{\tau, \text{int}}(l) + \frac{2\pi}{c} i_s(l) + \oint_L b_{\tau}(l; l') i_s(l') dl' = 0, \quad (3.93)$$

где  $B_{\tau, \text{int}}$  — поле токов, расположенных внутри тора. Учитывая соотношение (3.89), это уравнение можно записать так, чтобы подынтегральное выражение не имело особенностей:

$$B_{\tau, \text{int}}(l) + \frac{4\pi}{c} i_s(l) + \oint_L [b_{\tau}(l; l') i_s(l') - b_{\tau}(l'; l) i_s(l)] dl' = 0, \quad (3.94)$$

и тем самым было пригодно к непосредственному численному решению.

**3. Определение поля равновесной конфигурации вне плазмы.** Полное аналитическое решение уравнений равновесия возможно для квазиоднородного тока при условии, что граница плазмы совпадает с координатной поверхностью системы координат, допускающей разделение переменных (см. § 3.1—3.4). Однако если не интересоваться областью, расположенной вне плазменного шнура, то решения уравнения равновесия (2.21) при квазиоднородной плотности тока:  $2\pi c dp/d\Psi = A$ ,  $\frac{1}{c} \frac{dF^2}{d\Psi} = B$ , легко найти, добавив к решению неоднородного уравнения

$$\Psi = (-(4\pi^2/c) (Ar^2 + B)z^2 \quad (3.95)$$

решения однородного, например:

$$r^2, r^4 - 4r^2z^2, z^6 - 12r^4z^2 + 8r^2z^4 \dots \quad (3.96)$$

В частности, это позволяет получить решение, моделирующее конфигурацию плазменного шнура с  $D$ -образной формой сечения:

$$\Psi_i = (1 - r^2/R_1^2 - z^2/Z_1^2) (r^2/R_2^2 - 1). \quad (3.97)$$

Для получения полного решения необходимо определить поле вне плазмы.



По известному  $\Psi_i$  внутри плазмы удерживающее поле  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$  можно найти с помощью принципа виртуального кожуха (§ 2.5).

Чтобы продолжить  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$  за границу плазмы можно мысленно окружить ее тороидальной оболочкой с контуром сечения  $L$  и подобрать поверхностный ток  $i_{s, \text{ext}}$  на ней так, чтобы внутри плазмы его поле совпадало с известным удерживающим полем. Для этого достаточно приравнять тангенциальную компоненту удерживающего поля, которое по известному поверхностному току виртуального кожуха вычисляется по формуле (3.90), полю искомого тока  $i_{s, \text{ext}}$  [42]:

$$B_{\tau, \text{ext}}(l) = \oint_L b_{\tau}(l; L) i_{s, \text{ext}}(L) dL. \quad (3.98)$$

Точка  $l$  здесь расположена на поверхности плазмы, а  $L$  — на поверхности вспомогательной оболочки. Уравнение (3.98) является уравнением Фредгольма I рода.

Решение таких уравнений является некорректной задачей, так как добавление к  $i_{s, \text{ext}}$  быстро осциллирующей добавки не меняет значения интеграла. Поэтому, чтобы при численном решении исключить появление такой добавки, необходимо применять метод регуляризации [44].

Алгоритм решения основан на следующем. Обозначим интегральный оператор в правой части (3.98)  $\hat{C}i_{s, \text{ext}}$ . Задача решения уравнения (3.98) эквивалентна минимизации функционала невязки

$$d = \oint_i [\hat{C}i_{s, \text{ext}} - B_{\tau, \text{ext}}]^2 dl. \quad (3.99)$$

В методе регуляризации к функционалу (3.99) добавляется сглаживающий функционал и ищется минимум следующего функционала:

$$\alpha \oint_L \left[ k_1 \left( \frac{di_{s, \text{ext}}}{dL} \right)^2 + k_2 i_{s, \text{ext}}^2 \right] dL + \oint_i [\hat{C}i_{s, \text{ext}} - B_{\tau, \text{ext}}]^2 dl. \quad (3.100)$$

Здесь  $k_1, k_2$  — положительные коэффициенты порядка единицы, а  $\alpha$  — параметр регуляризации. Отыскание минимума (3.100) даже при малом  $\alpha$  представляет уже устойчивую задачу. Для выбора  $\alpha$  можно воспользоваться методом, описанным в работе [45]. Точность решения (3.100) определяется величиной невязки  $d$  (3.99). Если ориентироваться на достижение заданной точности, например  $d = d_0 = 10^{-6} \oint B_{\tau, \text{ext}}^2 dl$ , то параметр регуляризации можно выбрать с помощью следующего итерационного процесса:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \sqrt{d_0/d}. \quad (3.101)$$

Процесс выбора  $\alpha$  заканчивается по достижении заданной точности. Метод регуляризации из всех решений  $i_{s, \text{ext}}$  уравнения (3.98) выбирает решения, соответствующие минимуму нормы

$$\oint_L k_1 \left( \frac{di_{s, \text{ext}}}{dL} \right)^2 + k_2 i_{s, \text{ext}}^2 dL.$$

На рис. 14 показано удерживающее поле для конфигурации с тремя магнитными осями, полученное с помощью принципа виртуального кожуха, и его продолжение за границу плазмы с помощью рассмотренного здесь метода. Поскольку собственное поле  $B_{pl}$  тока плазмы вне шнура известно и равно полю тока виртуального кожуха, полное поле равновесной конфигурации вне плазмы представляется как поле двух поверхностных токов.

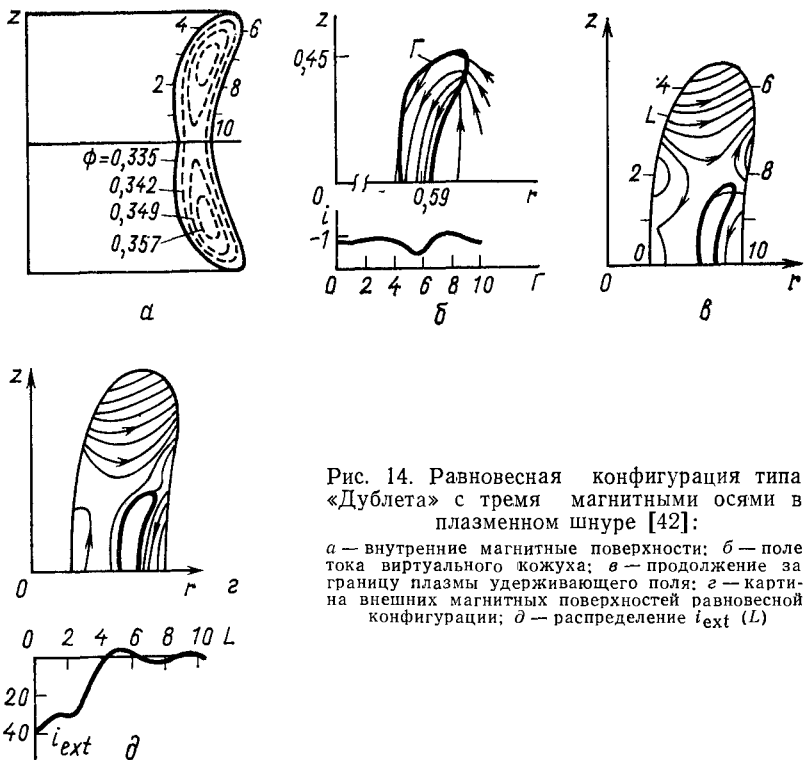


Рис. 14. Равновесная конфигурация типа «Дублета» с тремя магнитными осями в плазменном шнуре [42]:

*a* — внутренние магнитные поверхности; *б* — поле тока виртуального кожуха; *в* — продолжение за границу плазмы удерживающего поля; *г* — картина внешних магнитных поверхностей равновесной конфигурации; *д* — распределение  $i_{ext}(L)$

**4. Определение равновесного поля вне плазмы для прямолинейного шнура.** Метод продолжения равновесного поля за границу шнура, рассмотренный в предыдущем случае, применим как для тороидальной, так и для плоской геометрии (прямолинейный шнур). В случае плоской геометрии имеется возможность решить эту задачу также методом конформных отображений [46].

Пусть

$$w \equiv u + iv = w(x + iy) \quad (3.102)$$

— функция, осуществляющая отображение области вне плазмы на полуплоскость  $v > v_0$ , так что границе плазмы  $\Gamma$  соответствует уравнение

$$v(x, y) = v_0. \quad (3.103)$$

Будем искать векторный потенциал  $A_s$  как функцию  $A_s(u, v)$ .

Поскольку вне плазмы  $A_s$  удовлетворяет уравнению Лапласа, его можно представить как мнимую часть некоторой аналитической функции  $\varphi(w)$ :

$$A_s = \text{Im } \varphi(w). \quad (3.104)$$

Обозначим

$$g(u, v) = \left| \frac{dw}{d(x+iy)} \right|^{-1}. \quad (3.105)$$

Взаимно ортогональные компоненты магнитного поля  $B_u$  и  $B_v$  имеют вид

$$B_u = \frac{1}{g} \frac{\partial A_s}{\partial v} = \frac{1}{g} \frac{\partial \text{Re } \varphi}{\partial u}, \quad B_v = -\frac{1}{g} \frac{\partial A_s}{\partial u} = \frac{1}{g} \frac{\partial \text{Re } \varphi}{\partial v}, \quad (3.106)$$

так что

$$d\varphi/dw = g(u, v) (B_u - iB_v). \quad (3.107)$$

На границе плазмы  $B_v = 0$ , а распределение тангенциального поля  $B_u$  задано внутренним решением:  $B_u = B_u^0(u)$ . По известному значению на границе плазмы  $v = v_0$  аналитическая функция  $d\varphi/dw$  продолжается однозначно в область  $v > v_0$ :

$$d\varphi/dw = g(u + i(v - v_0), v_0) B_u^0(u + i(v - v_0)). \quad (3.108)$$

Отсюда для векторного потенциала имеем

$$\begin{aligned} A_s(u, v) &= A_{s0} + \text{Im} \int_0^{u+i(v-v_0)} g(w', v_0) B_u^0(w') dw' = \\ &= A_{s0} + \frac{1}{2i} \int_{n-1(v-v_0)}^{u+i(v-v_0)} g(w', v_0) B_u^0(w') dw'. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Здесь  $A_{s0}$  — значение  $A_s$  на границе плазмы. Для магнитного поля, пользуясь (3.107), (3.108), получаем выражение

$$B_u - iB_v = \frac{g(u+i(v-v_0), v_0)}{g(u, v)} B_u^0(u + i(v - v_0)). \quad (3.110)$$

Формулы (3.109), (3.110) и дают решение задачи о продолжении внутреннего решения за границу плазмы. Из выражения (3.109) следует, что появление во внешнем поле особенностей может быть вызвано двумя причинами: часть особенностей в  $A_s$  связана с особенностями геометрического фактора  $g(w', v_0)$  и особенности в (3.109) могут содержаться в функции  $B_u^0(w') = B_u^0(u + i(v - v_0))$ . Отметим, что некоторые особенности, связанные с геометрией сечения шнура, могут исчезнуть за счет соответствующих нулей функции  $B_u^0(w')$ .

**5. Проникновение магнитного поля через разрезы оболочек.** Рассмотрим экранирование магнитных полей, когда оболочки имеют раз-

резы. В хорошо проводящих оболочках, например в коже, служащем для поддержания равновесия, такие разрезы дают возможность ввести вихревое электрическое поле  $E_s$  (меридиональные разрезы) и продольное магнитное поле  $B_s$  (продольные разрезы). Они могут существенно сказываться и на проникновении магнитных полей, служащих для равновесия плазмы.

Будем считать оболочку сверхпроводящей и рассмотрим влияние меридиональных разрезов. Пусть внутри оболочки имеется шнур с током, собственное поле которого на поверхности оболочки равно  $B_{\tau, \text{int}}$ .

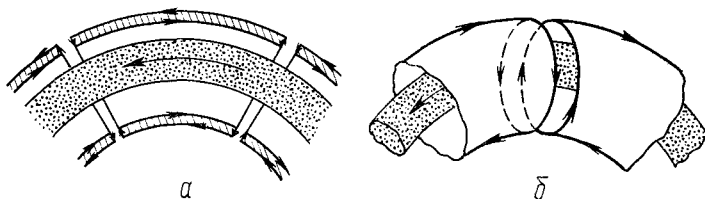


Рис. 15. Схема замыкания симметричной (а) и несимметричной (б) составляющей поверхностного тока в коже с разрезами [66]

При отсутствии разреза поверхностный ток  $i_s(l)$  в оболочке определяется уравнением (3.93) и связан с полным полем на поверхности оболочки соотношением

$$\frac{4\pi}{c} i_s(l) = -B_{\tau}(l). \quad (3.111)$$

При наличии разреза «симметричная» составляющая этого тока  $i_s^0(l)$  (ее полный ток равен току в шнуре), соответствующая распределению тока в сверхпроводящем торе (см. п. 2), замыкается по внешней поверхности оболочки, как показано на рис. 15, а. Остающаяся несимметричная часть  $\tilde{i}_s(l)$  поверхностного тока, равная в пренебрежении шириной разрезов

$$\frac{4\pi}{c} \tilde{i}_s(l) = -B_{\tau}(l) + \frac{4\pi}{c} i_s^0(l), \quad (3.112)$$

[полный ток ее равен нулю,  $\oint \tilde{i}_s(l) dl = 0$ ] замыкается сама на себя вдоль разреза (рис. 15, б).

Аналогичная несимметричная составляющая  $\tilde{i}_s(l)$ , замыкающаяся вдоль разреза, возбуждается и при падении на оболочку потока внешнего полоидального поля  $\mathbf{V}_{\text{ext}}$ . В этом случае распределение  $\tilde{i}_s(l)$  (в пренебрежении шириной разреза) определяется уравнением (3.84) с дополнительным условием  $\oint \tilde{i}_s(l) dl = 0$ .

Обозначим  $i_p(l, s)$  — распределение полоидальной составляющей поверхностного тока (здесь  $s$  — продольная координата:  $s = r\zeta$ , отсчитываемая от середины разреза). Оно определяется условием отсутствия нормальной компоненты магнитного поля на поверхности обо-

лочки и условием замыкания продольного тока  $\tilde{i}_s(l)$ . Вблизи разреза основной вклад в поле дает сам ток  $i_p(l, s)$ . Если считать ширину разреза  $h(l)$  малой по сравнению с размерами тора, то основная зависимость в  $i_p(l, s)$  связана с  $s$ , а  $l$  можно рассматривать как параметр. Поэтому зависимость от  $s$  можно определить из решения модельной задачи о распределении тока около кромок двух раздвинутых на расстояние  $h$  сверхпроводящих полуплоскостей (рис. 16), по которым во взаимно противоположных направлениях пропущены токи  $I$ . Векторный потенциал такого поля  $A$  легко находится в координатах эллиптического цилиндра (см. § 3.1), в которых  $d = h$ , а координатные линии  $v = \pi/2$  и  $v = -\pi/2$  совмещены со следами полуплоскостей:

$$A = \frac{2\pi}{c} v \frac{I}{\ln 2L/h}. \quad (3.113)$$

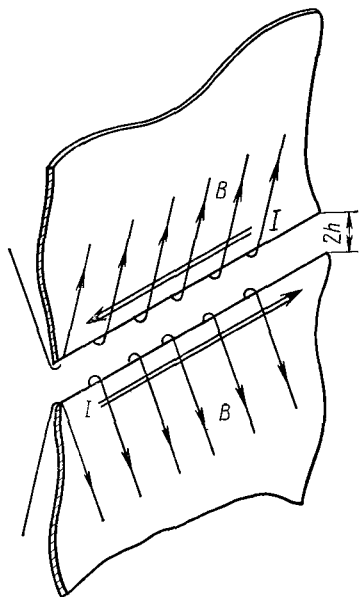


Рис. 16. Модельная задача для определения распределения магнитного поля в щели между двумя идеально-проводящими полуплоскостями и магнитного потока через щель

Нормировка здесь сделана так, что  $I$  равен полному току в каждой из полуплоскостей, а  $L$  представляет длину перезамыкания поверхностного тока. Это выражение соответствует распределению тока на пластинках вида [47]

$$i_p(l, s) = \frac{I(l)}{\ln 2L/h} \frac{1}{\sqrt{s^2 - h^2}} \quad (3.114)$$

и распределение нормальной к поверхности пластин компоненты поля в разрезе

$$B_{n.g} = \frac{2\pi}{c} \frac{I}{\ln 2L/h} \frac{1}{\sqrt{h^2 - s^2}}. \quad (3.115)$$

Ток перезамыкания распределен по контуру  $l$  по закону

$$I(l) = \int_0^l \tilde{i}_s(l) dl. \quad (3.116)$$

Начало обхода  $l = 0$  здесь определяется продольным разрезом в кожухе либо условиями симметрии.

Поток  $\Psi_g(l)$  магнитного поля (3.115) через разрез на единицу длины контура равен:

$$\frac{d\Psi_g(l)}{dl} = \frac{2\pi}{c} \pi \frac{I(l)}{\ln 2L/h}, \quad (3.117)$$

или

$$\Psi_g = \frac{2\pi}{c} \pi \frac{\int_0^l I(l) dl}{\ln 2L/h}. \quad (3.118)$$

При наличии нескольких разрезов необходимо просуммировать потоки через отдельные разрезы.

По своему масштабу поток через разрезы сравним с падающим потоком даже при малой ширине  $h$ . Рассмотрим, например, цилиндрическую оболочку радиуса  $b$ , помещенную в однородное поле  $\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_{\perp} \mathbf{e}_y$ . Тогда распределение тока  $\tilde{i}_s(\theta)$  по поверхности оболочки имеет вид

$$\frac{2\pi}{c} \tilde{i}_s(\theta) = B_{\perp} \cos \theta. \quad (3.119)$$

Подставляя это в (3.116) и (3.118), получаем величину потока, проходящего через разрез:

$$\Psi_g = 2\pi b^2 B_{\perp} / \ln \frac{2L}{h}. \quad (3.120)$$

Это значение соответствует прохождению невозмущенного магнитного поля  $B_{\perp} \mathbf{e}_y$  через щель шириной

$$h_{\text{eff}} = \pi b / \ln \frac{2L}{h}. \quad (3.121)$$

Таким образом, каждый разрез в тонкой оболочке соответствует эффективной ширине щели, сравнимой с диаметром оболочки.

Для оболочки конечной толщины  $d$ , которая сравнима с шириной разреза, результат несколько меняется [48]. В этом случае в формулах (3.117), (3.118), (3.120), (3.121) логарифмический член следует дополнить слагаемым  $\sqrt{2d/h}$ . В частности, эффективная ширина разреза для оболочки конечной толщины, становится меньше

$$h_{\text{eff}} = \frac{\pi b}{\ln 2L/h + \sqrt{2d/h}}. \quad (3.122)$$

Результаты, полученные для меридиональных разрезов, естественно, распространяются и на продольные разрезы. В частности, если продольный разрез мешает замыканию токов в оболочке, его эффективная ширина для проникновения поля будет заметно больше геометрической ширины.

**6. Бессилового тороидальный соленоид.** При отсутствии давления плазмы,  $\nabla p = 0$ , плотность тока  $\mathbf{j}$  в плазменном шнуре всюду параллельна магнитному полю,  $[\mathbf{j}\mathbf{B}] = 0$  (бессиловое магнитное поле). Рассмотрим бессиловую конфигурацию в случае, когда ток течет только по поверхности тора, при этом условие равновесия сводится к равенству магнитных давлений на поверхности тора:

$$B_{st}^2 = B_{se}^2 + B_p^2, \quad (3.123)$$

где  $B_{si}$  — продольное поле на внутренней, а  $B_{se}$ ,  $B_p$  — продольное и полоидальное поля на внешней сторонах тора.

Равенство (3.123) возможно и при  $B_{se} = 0$ , при этом распределение продольного тока  $i_s$  и полоидального поля имеет вид

$$(4\pi/c)i_s = B_p = 2F/cr, \quad (3.124)$$

где  $F$  — полный полоидальный ток.

Такую модель бессиловой конфигурации можно рассматривать как вариант тороидального соленоида, в котором скомпенсированы силы, действующие на токонесущие элементы, что может быть использовано при проектировании систем с предельно сильными полями [49]. Аналогия с равновесием плазменного шнура показывает, что равновесие такого соленоида обеспечивается только при наличии внешнего удерживающего поля  $\mathbf{V}_{ext}$ . Для тора круглого сечения в приближении большого аспектного отношения,  $R/a \gg 1$ , удерживающее поле оказывается равным:

$$\mathbf{V}_{ext} = B_z \mathbf{e}_z = -\frac{\mathcal{Y}}{cR} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} \right) \mathbf{e}_z, \quad \mathcal{Y} = aF/R. \quad (3.125)$$

Усилия, действующие на катушки удерживающего поля, должны восприниматься механической конструкцией. Поскольку нескомпенсированным является только тороидальный эффект, такая система уменьшает максимальные усилия примерно в  $R/a$  раз.

### § 3.6. Численные методы решения задач равновесия

Аналитические решения, которые удается довольно просто построить для характерных случаев (см. § 3.1—3.4), позволяют выявить основные эффекты, связанные с взаимодействием плазмы с внешними удерживающими полями. Однородное распределение тока, с которым связаны аналитические решения, является достаточно хорошей моделью, позволяющей, по крайней мере, качественно перенести результаты и на неоднородные распределения. Однако в дополнение к аналитическим методам, дающим понимание основных эффектов, требуются методы точного расчета равновесных конфигураций для общих случаев распределения  $p(a)$  и  $\mathcal{Y}(a)$  и произвольного сечения шнура. В настоящее время можно считать решенной проблему разработки численных методов для осесимметричных конфигураций, которые охватывают все разумные постановки задачи. Для несимметричных систем прогресс в этом вопросе пока существенно меньший и связан в основном с использованием самых мощных вычислительных машин типа CRAY. Обзор ряда численных методов расчета равновесия сделан в сборнике [50].

Есть два основных подхода к численному решению задач равновесия. Один основан на решении двумерного уравнения (2.21) на эйлеровой сетке, и здесь имеются алгоритмы, использующие функции Грина, ряды по собственным функциям и метод конечных разностей. Задача решается в большинстве случаев при заданных функциях

$p'(\Psi)$  и  $FF'(\Psi)$ . При другом подходе, который стал развиваться в последнее время, используют формулировку задач равновесия непосредственно в натуральных координатах (см. § 2.4).

Все методы, связанные с эйлеровой сеткой, основаны на том, что уравнение (2.21) с заданной правой частью является просто уравнением магнитостатики с нелинейной зависимостью плотности тока. Общей является и итерационная процедура. Следует еще раз отметить, что теория равновесия не вкладывает какого-либо смысла в функции  $p'(\Psi)$  и  $FF'(\Psi)$ , фигурирующие в формуле (2.20) для плотности тока  $j_s$ , а указывает только на требования к функциональной зависимости  $j_s$ . При численном решении, когда заранее неизвестны пределы изменения функции  $\Psi$  в плазме, плотность продольного тока естественно выбирать в виде

$$j_s(r, \Psi) = j_0 \frac{r}{R} \left[ f_1 \left( \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r} \right) + \frac{R^2}{r^2} f_2 \left( \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r} \right) \right], \quad (3.126)$$

где  $R = \text{const}$ , а функции  $f_1(\bar{\Psi})$  и  $f_2(\bar{\Psi})$  с точностью до коэффициентов совпадают с  $p'(\Psi)$  и  $FF'(\Psi)$ . Введение безразмерного аргумента  $\bar{\Psi} \equiv (\Psi - \Psi_r) / (\Psi_0 - \Psi_r)$  ( $\Psi_r, \Psi_0$  — значения  $\Psi$  на границе плазмы и магнитной оси) делает определенными пределы его изменения:  $\bar{\Psi} = 0 \div 1$ , что помогает еще до решения уравнения качественно представить распределение тока в шнуре.

При выборе плотности тока в виде (3.126) нелинейное уравнение (2.21) легко решается простейшими итерациями, когда плотность тока распределяется по магнитным поверхностям в соответствии с функцией  $\Psi$ , взятой с предыдущей итерации. При этом величины  $j_0, \Psi_r$ , определяющие нормировку плотности тока и поперечный размер шнура, могут на каждой итерации выбираться из дополнительных соображений (сохранение полного тока, плотности тока на магнитной оси, совмещение границы токового канала с отверстием диафрагмы).

Эйлеровы методы различаются только способом решения уравнения (2.21) с известной правой частью. Основными являются метод интегральных уравнений (метод функций Грина), использование собственных функций специальных систем координат, метод конечных разностей.

**1. Метод интегральных уравнений (метод функций Грина).** Используя выражение (3.92) для функции потока  $\Psi_0(r, z; r', z')$  единичного кольцевого тока, собственный магнитный поток  $\Psi_{p1}$  тока плазмы  $j_s(r, \Psi)$  можно представить в виде интеграла Био—Савара [51, 52]

$$\Psi_{p1}(r, z) = \iint \Psi_0(r, z; r', z') j_s(r', \Psi_{p1} + \Psi_{\text{ext}}) dr dz'. \quad (3.127)$$

Интегрирование ведется по сечению плазменного шнура. Это выражение можно непосредственно использовать для отыскания равновесия плазменного шнура со свободной границей в поле внешних токов  $I_t$



( $i = 1, 2 \dots$ ). Поток удерживающего поля определяется по заданным токам  $I_i$  соотношением

$$\Psi_{\text{ext}}(r, z) = \sum_i \Psi_0(r, z; r', z') I_i. \quad (3.128)$$

Для вычисления  $\Psi_{\text{pl}}(r, z)$  необходимо заменить интеграл (3.127) конечными суммами, представив ток в плазменном шнуре набором эквивалентных кольцевых токов, значения которых пропорциональны элементу площади сечения. Для вычисления диагональных элементов суммы при  $r = r', z = z'$ , коэффициенты которых являются индуктивностями соответствующих элементарных токов, можно воспользоваться формулой для коэффициента самоиндукции кольцевых токов (с однородным распределением тока)

$$L = 4\pi R [\ln 8R/a - 3/2 + O(a^2/R^2)], \quad (3.129)$$

где  $a$  — характерный поперечный размер элемента площади:  $a = \sqrt{\Delta S/\pi}$ ;  $R = r'$ , а поправки  $O(a^2/R^2)$ , связанные с формой элемента площади, можно уточнить с помощью численного вычисления самоиндукции либо просто по справочникам.

При определении равновесия во внешних полях требуется ставить дополнительные условия на границу токового канала. Естественным является, например, требование, чтобы граница токового канала вписывалась в апертуру диафрагмы или камеры установки. В ряде случаев естественным является требование, чтобы токовый канал ограничивался сепаратрисой. Эти требования накладывают определенные условия на выбор  $\Psi_{\text{r}}$  в (3.126) — значения  $\Psi$  на границе плазмы — и на внешние токи  $I_i$ , которые должны, в частности, обеспечивать определенное положение шнура по большому радиусу, вытянутость сечения и др. В большинстве случаев требования на внешние токи можно свести к условию фиксации по некоторым характерным точкам положения и формы какой-либо внешней магнитной поверхности, т. е. чтобы определенные точки пространства  $r_j, z_j$  лежали на общей магнитной поверхности [53]. Выполнение этих условий закладывается в каждый итерационный шаг, и тем самым на токи накладываются обратные связи.

Примеры расчета равновесия со свободной границей приведены на рис. 17.

В интегральной форме уравнение равновесия можно записать и для задачи равновесия плазмы в идеально проводящем кожухе. При этом удерживающее поле  $\Psi_{\text{ext}}$  будет создаваться токами отражения  $i_s(l)$  в кожухе, которые можно найти из условия экранировки: поле вне кожуха равно нулю. Обозначим  $B_{\tau}(l)$  тангенциальную компоненту поля плазмы на поверхности кожуха:

$$B_{\tau}(l) = \iint b_{\tau}(l; r', z') j_s(r', \Psi) dr' dz', \quad (3.130)$$

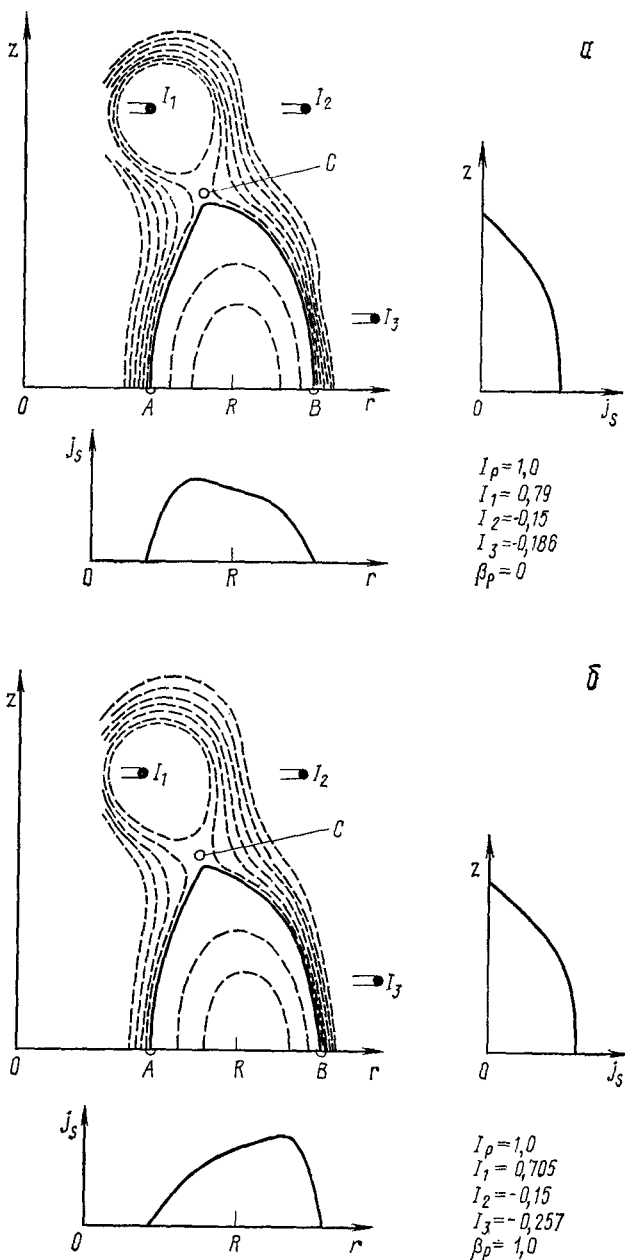


Рис. 17. Расчет равновесия плазмы со свободной границей для двух значений  $\beta_p$ . Показана верхняя половина конфигурации. Сплошной линией выделена поверхность плазмы. Кружочками отмечены фиксированные точки  $A, B, C$ ; токи равновесия выбираются из условия, чтобы граница плазмы проходила через точки  $A, B, C$

тогда распределение тока  $i_s$  будет определяться уравнением (3.94). Вычислив обратный интегральный оператор для уравнения (3.94), решение его можно записать в виде

$$i_s(l) = \oint_{l'} K(l; l') B_\tau(l') dl' = \oint_{l'} K(l; l') \iint b_\tau(l'; r', z') j_s(r', \Psi) dr' dz'. \quad (3.131)$$

Поток удерживающего поля  $\Psi_{\text{ext}}$ , создаваемый поверхностным током  $i_s(l)$ , равен:

$$\Psi_{\text{ext}}(r, z) = \oint l \Psi_0(r, z; l) i_s(l) dl. \quad (3.132)$$

Суммируя его с потоком собственного поля тока (3.125), получаем интегральное уравнение

$$\Psi(r, z) = \iint \Psi_\Gamma(r, z; r', z') j_s(r', \Psi) dr' dz' \quad (3.133)$$

для функции потока  $\Psi$  полного поля. В уравнении (3.133) ядро имеет вид

$$\Psi_\Gamma(r, z; r', z') = \Psi_0(r, z; r', z') + \iint_{l'} \iint \Psi_0(r, z; l) K(l, l') b_\tau(l'; r', z') dl dl'. \quad (3.134)$$

Интегрирование в (3.133), как и в (3.127), ведется по сечению токового канала. На поверхности кожуха при этом автоматически обеспечивается равенство  $\Psi = 0$ .

В качестве примера решения задач равновесия плазмы в кожухе рассмотрим вопрос о влиянии вытянутости кожуха на форму магнитных поверхностей. Если ток в шнуре однородный и границей токового канала является кожух, то все магнитные поверхности внутри шнура будут отражать вытянутость кожуха. Однако если плотность тока сконцентрирована вблизи магнитной оси, то внутренние магнитные поверхности будут иметь ограниченную вытянутость даже при большой вытянутости кожуха. На рис. 18 показаны расчеты равновесия для плотности тока вида

$$j_{p1} = j_0 (\Psi/\Psi_0)^n / r, \quad n = 1, 2. \quad (3.135)$$

При  $n = 1$  вытягивание сечения кожуха влечет за собой вытягивание магнитных поверхностей вблизи магнитной оси. При  $n = 2$  вблизи оси магнитные поверхности имеют ограниченную вытянутость,  $l_z/l_r = 1,5$ , независимо от вытянутости кожуха.

Метод интегральных уравнений можно легко обобщить и на комбинированные задачи, когда имеются магнитные экраны типа кожуха одновременно с полями внешних токов.

**2. Метод собственных функций.** Для решения задачи равновесия плазмы со свободной границей необходимо иметь выражение для собственного поля плазмы. Его можно получить в виде ряда, если воспользоваться системами координат, допускающими разделение пере-

менных в однородном уравнении (2.21). Для тороидального шнура такими координатами могут служить сферические  $\rho, \nu, \zeta$ , либо тороидальные  $\eta, \omega, \zeta$  (см. § 3.3).

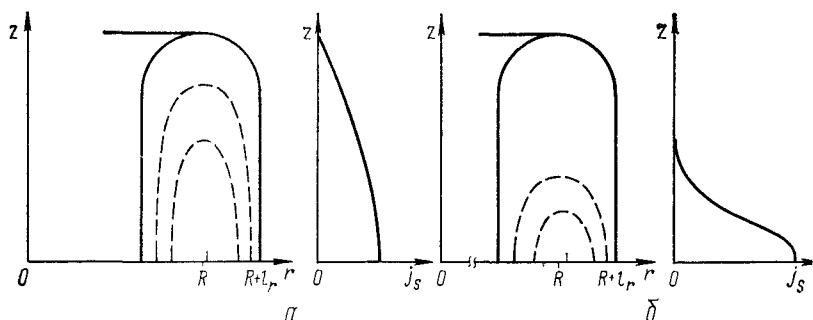


Рис. 18. Расчет равновесия в кожухе типа рейстрек с неоднородным распределением тока,  $R_r/l_r=3$ ,  $l_z/l_r=4$ . Показана верхняя половина конфигурации:

$a - j_s \sim \Psi^1/r$ . Внутренние магнитные поверхности вытягиваются при увеличении  $l_z/l_r$ ;  $b - j_s \sim \Psi^2/r$ . Внутренние магнитные поверхности имеют ограниченную вытянутость независимо от вытянутости кожуха

В сферических координатах общее решение однородного уравнения (2.21) записывается в виде ряда (3.59). Решение неоднородного уравнения (2.21) с условием  $\Psi_{p1} \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow \infty$  можно представить в виде

$$\Psi_{p1}(\rho, \nu) = \frac{4\pi^2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu}{n(n+1)} \left[ \frac{1}{\rho^n} \int_0^{\rho} \rho^{n+2} S_n d\rho + \rho^{n+1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{S_n d\rho}{\rho^{n-1}} \right] \dot{P}_n(\cos \nu) + \frac{4\pi^2}{c} \left[ \rho \int_{\rho}^{\infty} S_0 \rho d\rho - \int_{\rho}^{\infty} S_0 \rho^2 d\rho \right] \cos \nu, \quad (3.136)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_n(\rho) &= \int_0^{\pi} j_s(\rho, \nu) \sin^2 \nu \dot{P}_n(\cos \nu) d\nu; \\ S_0(\rho) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} j_s(\rho, \nu) \sin 2\nu d\nu. \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

Если  $\rho$  становится больше своего максимального значения в сечении токового канала, то функции  $S_n(\rho)$  обращаются в нуль и в ряде (3.136) остаются только явно убывающие при  $\rho \rightarrow \infty$  слагаемые. Имея выражение для собственного поля тока плазмы, решение нелинейного уравнения равновесия можно получить итерациями так же, как и в методе интегральных уравнений.

Сферические координаты и ряд (3.136) в задачах равновесия использовали Фенеберг и Лакнер [54], где впервые были численно получены

решения задачи равновесия в заданных внешних полях и, в частности, результат о существовании предельной величины квадрупольного поля (см. § 3.1.).

Сферические координаты естественны для конфигураций типа компактных торов. Для шнура большого аспектного отношения рациональнее использовать тороидальные координаты, описанные в § 3.3. Соответствующие выражения для собственного поля тока плазмы были уже выписаны в § 3.3 [формула (3.46)]. Для вычисления собственных функций  $f_n(\eta)$  можно использовать гипергеометрический ряд

$$f_n(\eta) = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 \eta \exp \left[ - \left( n + \frac{3}{2} \right) \eta \right] F \left( n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 - \exp(-2\eta) \right), \quad (3.138)$$

а для функций  $g_n(\eta)$

$$g_n(\eta) = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sh}^2 \eta \exp \left[ - \left( n + \frac{3}{2} \right) \eta \right] \frac{\Gamma(n-1/2)}{n!} F \left( n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, n+1, \exp(-2\eta) \right). \quad (3.139)$$

**3. Метод конечных разностей.** Для решения дифференциального уравнения (2.21) в ограниченной области, что требуется, например, при определении равновесия внутри кожуха заданной формы, можно использовать метод конечных разностей [55, 56]. Граничное условие, необходимое при применении этого метода, имеется в явном виде:  $\Psi|_{\Gamma} = \text{const}$ . Итерационная схема может быть стандартной, когда плотность тока распределяется по магнитным поверхностям в соответствии с  $\Psi^{(n-1)}$ , взятой с предыдущей итерации.

Представляет интерес распространение метода конечных разностей на задачи равновесия со свободной границей [57]. Для этого необходимо преодолеть трудность, связанную с ограниченностью вычислительной сетки, и найти соответствующее граничное условие. Недостатком метода конечных разностей по сравнению с рассмотренными выше методами является то, что он не позволяет разделить собственное поле тока плазмы  $\Psi_{pl}$  и удерживающее. Однако если использовать принцип виртуального кожуха для определения собственного поля, то можно и на ограниченной в пространстве вычислительной сетке получить такое граничное условие, при котором решение будет соответствовать равновесию в заданном удерживающем поле  $\Psi_{ext}$ .

Пусть  $\Gamma$ —контур, ограничивающий вычислительную сетку. Значение функции потока  $\Psi$  на  $\Gamma$  складывается из заданного потока  $\Psi_{ext}$  и магнитного потока тока плазмы  $\Psi_{pl}$ . Поле плазмы вне  $\Gamma$  в соответствии с принципом виртуального кожуха можно найти как поле поверхностного тока  $i_s(l)$ , определяемого по формуле

$$\frac{4\pi}{c} i_s(l) = B_{\tau}^1(l) = - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi^1}{\partial n}. \quad (3.140)$$

Чтобы можно было применить принцип виртуального кожуха, надо, чтобы контур  $\Gamma$  был сечением магнитной поверхности. Поэтому для

определения  $\Psi^1$  и  $i_s$  достаточно решить вспомогательную краевую задачу [58]: решить внутри  $\Gamma$  уравнение (2.21) с заданной правой частью и граничным условием  $\Psi^1|_{\Gamma} = \text{const}$ . Вычислив  $\Psi_{p1}|_{\Gamma}$  как магнитный поток от поверхностного тока  $i_s(l)$  (3.140), получаем граничное условие для потока  $\Psi$  равновесного поля:

$$\Psi|_{\Gamma} = \Psi_{p1}|_{\Gamma} + \Psi_{\text{ext}}|_{\Gamma}.$$

Все рассмотренные выше методы широко применялись для решения задач равновесия. В методе интегральных уравнений явно фигурируют все источники поля, так как плазма фактически заменяется набором кольцевых токов. Это дает возможность легко приспособлять метод к различным формулировкам задач и делает его надежным при использовании. Достоинством этого метода является также нечувствительность к выбору вычислительной сетки, которая может определяться любыми криволинейными координатами. Важно только обеспечить достаточно точное интегрирование. Для заданной сетки ядра уравнения вычисляются только один раз и затем могут использоваться для решения задач с различными распределениями тока в плазме и во внешних цепях. Недостатком его является необходимость хранения в оперативной памяти ЭВМ ядра уравнения в виде двумерной матрицы, что ограничивает возможности увеличения точности вычислений. Типичным является использование 100—150 узлов внутри плазмы. Этого заведомо достаточно для решения собственно задач равновесия и, в частности, расчетов магнитных систем, служащих для поддержания равновесия плазмы. Однако замена тока плазмы набором кольцевых нитей с током делает затруднительным описание структуры магнитной конфигурации внутри плазмы. Большей гладкостью обладают решения, полученные с использованием рядов по собственным функциям, где обычно используется  $\sim 50$  членов ряда,  $\sim 100$  точек в радиальном и 50 точек в угловом направлении. Это позволяет произвести достаточно точную интерполяцию и подробно описать структуру конфигурации как вне, так и внутри плазмы.

Метод конечных разностей удобен тем, что позволяет использовать простейшую прямоугольную сетку, для которой разработаны эффективные алгоритмы решения уравнения Пуассона. Такой выбор сетки облегчает стыковку расчетов равновесия с другими задачами теории плазмы, например исследованиями МГД-неустойчивостей, для которых вычисление равновесия дает начальные условия. Это обусловило широкое распространение метода конечных разностей в настоящее время. Некоторые неудобства в этом методе возникают при расчете равновесия с закрепленной границей в связи с аппроксимацией граничных условий на криволинейной границе. Поэтому задачи равновесия с фиксированной границей решаются этим методом как задачи со свободной границей, а токи, создающие удерживающее поле, подбираются так, чтобы граница шнура проходила через заданные точки в пространстве [57].

**4. Метод обращенных переменных.** Рассмотренные выше эйлеровы методы обладают тем общим недостатком, что дают в результате значения функции потока  $\Psi$  в фиксированных точках пространства. С фи-

зической точки зрения естественно квазицилиндрическое описание равновесия плазмы (см. § 2.4). Чтобы перейти к нему, необходимо определить магнитные поверхности и вычислить интегральные характеристики с помощью интегрирования по магнитным поверхностям. В эйлеровых методах такая процедура связана с дополнительным интерполированием значений функции потока (обычно для этого применяют приближение кубическими сплайнами) и построением контуров  $\Psi = \text{const}$ . Покажем связь полученного решения с функциями, фигурирующими в квазицилиндрическом описании.

Метку  $a$  магнитных поверхностей можно выбрать произвольным образом. Поэтому зависимость  $\Psi(a)$  будем считать выбранной. Кроме того, имеется свобода в выборе угла  $\theta$  на каждой из магнитных поверхностей. Поэтому функцию  $\theta(r, z)$  можно выбирать из дополнительных соображений. Интегральные характеристики магнитных поверхностей, такие, как  $\mathcal{Y}(a)$ ,  $\Phi(a)$ , находятся прямым интегрированием. Метрические коэффициенты  $g_{ik}$  можно найти, пользуясь соотношениями

$$g_{11} = \hat{g}g^{22}, \quad g_{22} = \hat{g}g^{11}, \quad g_{12} = -\hat{g}g^{12}, \quad (3.141)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{g} &= \frac{1}{\Psi'^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^{-2}, \quad g^{11} = \frac{1}{\Psi'^2} |\nabla \Psi|^2, \\ g^{22} &= |\nabla \theta|^2, \quad g^{12} = \frac{1}{\Psi'} \nabla \Psi \nabla \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

Для некоторых усредненных величин, важных для задач эволюции и МГД-устойчивости, можно написать явные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \langle V \bar{g} \rangle &= -\frac{\Psi'}{4\pi^2} \oint \frac{dl}{r B_p}, \quad \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle = -\frac{1}{\Psi'} \oint B_p dl; \\ \left\langle \frac{V \bar{g}}{g_{33}} \right\rangle &= -\frac{\Psi'}{4\pi^2} \oint \frac{dl}{r^2 B_p}, \quad q = -\frac{\Phi'}{\Psi'} = \frac{4\pi}{c} \frac{F}{4\pi^2} \oint \frac{dl}{r^2 B_p}. \end{aligned} \right\} \quad (3.143)$$

Формулы (3.141), (3.143) позволяют перейти от описания на эйлеровой сетке к квазицилиндрическому описанию.

Если рассматривать решения уравнений равновесия как исходные данные для исследования МГД-устойчивости и эволюции равновесия, то следует с самого начала сформулировать задачу в натуральных координатах, а искомыми считать эйлеровы координаты  $r(a, \theta)$ ,  $z(a, \theta)$  магнитных поверхностей [59]. Проще всего это сделать в ортогональных координатах  $a$ ,  $\theta$ . Условие ортогональности  $g_{12} = 0$  записывается в виде

$$\frac{\partial r}{\partial a} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \quad (3.144)$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} \Big/ \frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{\partial r}{\partial \theta} \Big/ \frac{\partial z}{\partial a} = \alpha(a, \theta), \quad (3.145)$$

при этом

$$g_{11} = \left( \frac{\partial r}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)^2, \quad g_{22} = \alpha^2 g_{11}, \quad \sqrt{g} = \alpha r g_{11}. \quad (3.146)$$

Уравнение равновесия (2.71) с учетом ортогональности можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \frac{\alpha}{r} \Psi' = \frac{d}{da} \left\langle \frac{\alpha}{r} \right\rangle \Psi' + 16\pi^3 \frac{p'}{\Psi'} \left[ \left\langle \sqrt{g} \right\rangle \frac{(\sqrt{g}/g_{33})}{\left\langle \sqrt{g}/g_{33} \right\rangle} - (\sqrt{g}) \right] + \\ + \frac{(\sqrt{g}/g_{33})}{\left\langle \sqrt{g}/g_{33} \right\rangle} \frac{d}{da} \left\langle \frac{\alpha}{r} \right\rangle \Psi', \end{aligned} \quad (3.147)$$

а условия ортогональности так:

$$\frac{\partial}{\partial a} \alpha \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0; \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \alpha \frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0. \quad (3.149)$$

Эти три уравнения служат для определения трех неизвестных функций:  $\alpha(a, \theta)$ ,  $z(a, \theta)$ ,  $r(a, \theta)$ .

Рассмотрим теперь дополнительные условия для системы уравнений (3.147)—(3.149). Для уравнений (3.148), (3.149) ставится условие периодичности по  $\theta$ . Кроме того, на магнитной оси  $\alpha(0, \theta) = 0$  и поэтому при  $a = 0$  ставится условие регулярности

$$\alpha \partial r / \partial a = 0, \quad \alpha \partial z / \partial a = 0. \quad (3.150)$$

На границе плазмы  $a = a_0$ , функции  $r(a_0, \theta)$  и  $z(a_0, \theta)$  связаны уравнением контура сечения плазмы

$$z = z(r). \quad (3.151)$$

Зависимость  $r(a_0, \theta)$  [или  $z(a_0, \theta)$ ] при заданной функции  $\alpha(a, \theta)$  не может быть произвольной и должна, например, удовлетворять условию

$$\left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = \alpha^2 \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)^2 \right]. \quad (3.152)$$

Эти граничные условия при заданном  $\alpha(a, \theta)$  однозначно определяют решение уравнений для  $r(a, \theta)$ ,  $z(a, \theta)$ . Сама же функция  $\alpha(a, \theta)$  находится из уравнения (3.147). Подобная система уравнений с нелинейными граничными условиями может быть решена методом последовательных приближений. На рис. 19 показан расчет конфигурации с заданными зависимостями  $p(a)$ ,  $q(a)$  с помощью метода обращенных переменных [59].

**5. Метод моментов (метод предписанных магнитных поверхностей).** Описанные выше численные методы являются универсальными и применимыми для расчетов равновесия плазмы произвольного сечения.



В ряде случаев достаточно учесть лишь основные эффекты, связанные с деформацией сечения шнура, упростив при этом описание равновесия. В большинстве случаев форму сечения магнитных поверхностей можно аппроксимировать простыми формулами. Например, можно взять параметрическую зависимость в виде рядов

$$r = R - \Delta(a) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(a) \cos n\theta; \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(a) \sin n\theta, \quad (3.153)$$

число членов которых ограничить минимально допустимым без ущерба для основных эффектов. Так, для токамака круглого сечения основным эффектом является смещение магнитных поверхностей, свя-

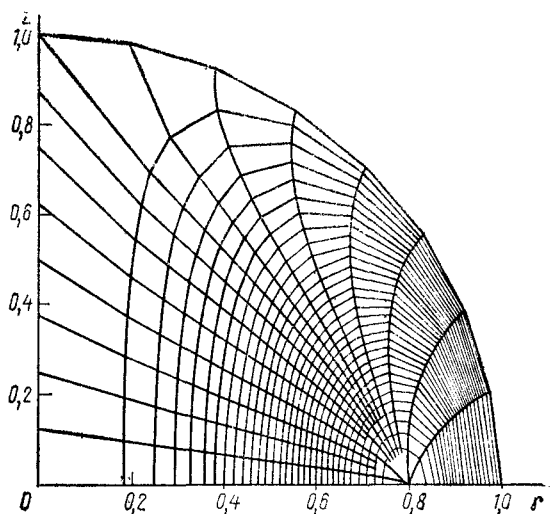


Рис. 19. Результаты расчетов равновесия с использованием натуральных координат в компактном торе с зависимостью  $\rho = C \left( \oint \frac{dl}{rB_p} \right)^{-\nu}$ ,  $\nu = 5/3$ . Показана верхняя половина меридионального сечения шнура

занное с тороидальностью, а изменение их формы является вторичным. Поэтому для описания такого равновесия можно ограничиться моделью поверхностей круглого сечения, смещенных относительно магнитной оси (модель Кларка—Сигмара) [60]. Для шнура вытянутого сечения можно взять за основу модель вложенных эллипсов с переменным отношением полуосей. Довольно универсальной является модель, в которой учитываются смещение, вытянутость и треугольность магнитных поверхностей:

$$r = R - \Delta(a) - \rho(a, \theta) \cos \theta; \quad z = \lambda(a) \rho(a, \theta) \sin \theta; \\ \rho = a + \delta(a) \cos 3\theta. \quad (3.154)$$

Параметр треугольности  $\delta$  важен с точки зрения МГД-устойчивости плазмы по отношению к мелкомасштабным модам и должен учитываться при оптимизации равновесных конфигураций.

Уравнения для параметров магнитных поверхностей можно получить разными способами. Один из них основан на соотношениях для моментов уравнения равновесия (см. § 2.6). Для получения их воспользуемся теоремой взаимности электродинамики (2.115), взяв в качестве области интегрирования в (2.115) сечение магнитной поверхности, тогда получим соотношения

$$\frac{4\pi}{c} \int j_s f_k \frac{\sqrt{g}}{r} da d\theta = \oint B_\tau f_k \sqrt{g_{22}} d\theta, \quad (3.155)$$

где  $f_k$  — например, последовательность функций (2.121).

В натуральных координатах после дифференцирования по  $a$  уравнения (3.155) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} -4\pi^2 c \frac{4\pi}{c} p' \langle f_k \sqrt{g} \rangle - \left( \frac{4\pi}{c} \right)^2 FF' \langle f_k \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \rangle = \\ = \Psi' \frac{d}{da} \left\langle f_k \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \Psi'. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по  $\theta$ . Как уже отмечалось выше функция  $FF'$  в плазме подстраивается под распределение давления  $p(a)$  и плотности тока  $j_s(a)$ , которые в реальных системах определяют нагрев и процессами переноса. Для удобства можно вместо  $j_s(a)$  использовать в качестве заданной функции  $\Psi'(a)$ . Напомним, что связь между ними имеет вид (2.69)

$$\frac{4\pi}{c} j_s(a) = -\frac{1}{a} \frac{d}{da} \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{R}{a} \right\rangle a \frac{\Psi'}{2\pi R}. \quad (3.157)$$

Функцию  $FF'$  можно исключить из системы (3.156), выразив ее из усредненного уравнения равновесия ( $f_\theta = 1$ ) и подставив в остальные, при этом

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} c 4\pi^2 p' \left\langle f_k \left[ \frac{\sqrt{g}/g_{33}}{\langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle} \langle \sqrt{g} \rangle - \sqrt{g} \right] \right\rangle = \\ = \Psi' \frac{d}{da} \left\langle f_k \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \Psi' - \Psi' \frac{\langle f_k \sqrt{g}/g_{33} \rangle}{\langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle} \frac{d}{da} \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \Psi'. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Для простейших моделей усреднение можно выполнить аналитически и тем самым получить обыкновенные дифференциальные уравнения для параметров магнитных поверхностей. Рассмотрим для примера модель вложенных эллипсов применительно к равновесию прямолинейного шнура. Пусть уравнения сечений магнитных поверхностей имеют вид

$$x = a \cos \theta, \quad y = \lambda(a) a \sin \theta, \quad (3.159)$$

где  $\lambda(a)$  — отношение полуосей. Выпишем основные функции, фигурирующие в уравнениях для моментов:

$$\left. \begin{aligned} g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{a^2}{2} [\lambda^2 + 1 + (\lambda^2 - 1) \cos 2\theta]; \\ \sqrt{g} &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial \theta} = a\lambda \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a\lambda'}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{a\lambda'}{\lambda} \cos 2\theta\right]; \\ f_0 &= 1, \quad f_2 = y^2 - x^2 = \frac{a^2}{2} [\lambda^2 - 1 - (\lambda^2 + 1) \cos 2\theta]. \end{aligned} \right\} (3.160)$$

Соответствующие усредненные величины равны:

$$\left. \begin{aligned} \langle \sqrt{g} \rangle &= \frac{1}{2} (a^2 \lambda)', \quad \langle f_2 \sqrt{g} \rangle = \frac{1}{8} [a^4 (\lambda^3 - \lambda)]; \\ \langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \rangle &= \\ &= \frac{a}{2\lambda} \frac{(\lambda^2 + 1) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a\lambda'}{\lambda} + \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}}\right) + (\lambda^2 - 1) \frac{1}{2} \frac{a\lambda'}{\lambda}}{\sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a\lambda'}{\lambda} + \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}}\right)}; \\ \langle f_2 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \rangle &= \frac{a^3}{4\lambda} \frac{(\lambda^4 - 1) \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}} - 2\lambda^2 \frac{a\lambda'}{\lambda}}{\sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a\lambda'}{\lambda} + \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}}\right)} \end{aligned} \right\} (3.161)$$

Связь потока  $\Psi'(a)$  с плотностью тока  $j(a)$  имеет вид

$$-\Psi' \langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \int_0^a j(a) \frac{1}{2} (a^2 \lambda)' da, \quad \Psi = A_s. \quad (3.162)$$

Уравнение для эллиптичности  $\lambda(a)$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{a\lambda'}{\lambda} \left[ \left[ \lambda^4 + 6\lambda + 1 + \frac{a\lambda'}{\lambda} \frac{\lambda^4 - 1}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}}\right)^2} \right] \lambda j(a) - \right. \\ &\left. - \left[ (\lambda^2 + 1) \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}}}\right) + \lambda^2 - 1 \right] \frac{1}{a^4} \int_0^a j'(a) a^4 \lambda (\lambda^2 - 1) da + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ 4(\lambda^4 - 1) \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{a\lambda'}{\lambda}}} - 8\lambda^2 \right] \frac{1}{a^2} \int_0^a j'(a) a^2 \lambda da \Big\} = \\
& = 4(\lambda^2 + 1) \frac{1}{a^4} \int_0^a j'(a) a^4 \lambda (\lambda^2 - 1) da - \\
& - 4(\lambda^4 - 1) \frac{1}{a^2} \int_0^a j'(a) a^2 \lambda da. \tag{3.163}
\end{aligned}$$

По заданной плотности тока  $j(a)$  это уравнение можно решить итерациями, подставляя в фигурную скобку и правую часть выражения параметры, взятые с промежуточной итерации.

По известным  $p(a)$ ,  $\Psi'(a)$ ,  $\lambda(a)$  все величины, характеризующие конфигурацию, вычисляются просто по общим формулам (см. § 2.4). Выпишем здесь выражения для вращательного преобразования  $\mu = -\Psi'/\Phi'$  и квадрупольной составляющей удерживающего поля в этой модели:

$$\mu = \frac{4\pi}{c} \frac{R}{B_s} \frac{\int_0^a j'(a) a^2 \lambda - \int_0^a j'(a) a^2 \lambda da}{(a^2 \lambda)' \langle g_{22} / \sqrt{g^-} \rangle}; \tag{3.164}$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{ext}} &= \frac{4\pi}{c} (y^2 - x^2) \frac{\lambda j_s(a) - \frac{1}{a_0^2} \int_0^{a_0} j_s' a^2 \lambda da}{(\lambda + 1)^2} \times \\
& \times \frac{\lambda^2 - 1 + \lambda^2 a \lambda' / \lambda}{(\lambda^2 + 1) (1 + \sqrt{1 + a \lambda' / \lambda}) + \lambda^2 a \lambda' / \lambda}. \tag{3.165}
\end{aligned}$$

В (3.165) все величины вычисляются на границе шнура  $a = a_0$ . Для шнура с однородным током (3.165) переходит в выражение (3.7), полученное на основе точного решения.

Более удобный способ получения уравнений для параметров  $u_i(a)$  магнитных поверхностей предложил Хаит в [61]. Уравнение равновесия (2.21) можно рассматривать как уравнение Эйлера—Остроградского для вариации функционала

$$Q = \iint \left\{ \frac{1}{r} (\nabla \Psi)^2 - \frac{16\pi^2}{c} \left[ 2\pi c r p(\Psi) + \frac{F^2(\Psi)}{c r} \right] \right\} dS_\Phi \tag{3.166}$$

по отношению к функции  $\Psi(r, z)$ . Интегрирование здесь ведется по поперечному сечению плазменного шнура  $S_\Phi$ .

Перейдем теперь к натуральной системе координат  $a, \theta, \zeta$ , в которой функция  $\Psi(r, z)$  является одномерной:  $\Psi = \Psi(a)$ . Функционал (3.166) теперь имеет вид

$$Q = \int \int \left\{ \frac{g_{22}}{V\bar{g}} \Psi'^2 - \frac{16\pi^2}{c} \left[ 2\pi c p(a) + \frac{F^2(a)}{cr^2} \right] V\bar{g} \right\} dad\theta, \quad (3.167)$$

и экстремум его должен находиться уже по параметрам  $u_i(a)$ , характеризующим сечение магнитных поверхностей [ $a(r, z) = \text{const}$ ]. Введем обозначения

$$K \equiv \left\langle \frac{g_{22}}{V\bar{g}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{|\nabla a|}{r} dl; \quad (3.168)$$

$$V \equiv \int_0^a \langle V\bar{g} \rangle da = \frac{1}{2\pi} \int \int_{S_\Phi(a)} rdS_\Phi; \quad (3.169)$$

$$L \equiv \int_0^a \left\langle \frac{V\bar{g}}{g_{33}} \right\rangle da = \frac{1}{2\pi} \int \int_{S_\Phi(a)} \frac{dS_\Phi}{r}. \quad (3.170)$$

Из выражений для  $K, V, L$  следует, что  $K$  зависит как от самих параметров магнитных поверхностей  $u_i$ , так и от их производных по  $a$ :  $K = K(a, u_i, u_i')$ , а функции  $V, L$  от производных не зависят:  $V = V(a, u_i)$ ,  $L = L(a, u_i)$ . Функционал (3.167) можно теперь переписать в виде одномерного интеграла

$$Q = 2\pi \int_0^{a_0} \left[ K\Psi'^2 - \frac{16\pi^2}{c} \left( 2\pi c p V' + \frac{F^2}{c} L' \right) \right] da. \quad (3.171)$$

Последние два слагаемых можно проинтегрировать по частям:

$$Q = 2\pi \int_0^{a_0} \left[ K\Psi'^2 + \frac{16\pi^2}{c} \left( 2\pi c p' V + \frac{2FF'}{c} L \right) \right] da - \frac{32\pi^3}{c^2} F^2 L \Big|_{a=a_0}. \quad (3.172)$$

Внеинтегральный член постоянен при фиксированной границе плазмы и его можно не учитывать при варьировании функционала. Уравнениями Эйлера—Лагранжа для одномерных функций  $u_i(a)$  являются

$$\begin{aligned} & \frac{d}{da} \left( \Psi'^2 \frac{\partial K}{\partial u_i'} \right) - \Psi'^2 \frac{\partial K}{\partial u_i} - \frac{16\pi^2}{c} \times \\ & \times \left( 2\pi c p' \frac{\partial V}{\partial u_i} + \frac{2FF'}{c} \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Вместе с усредненным уравнением равновесия

$$\Psi' \frac{d}{da} K \Psi' + \frac{8\pi^2}{c} \left( 2\pi c p' V' + \frac{2FF'}{c} L' \right) = 0 \quad (3.174)$$

эти уравнения образуют полную систему для определения параметров  $u_i(a)$  магнитных поверхностей.

### § 3.7. Равновесие с анизотропным давлением

В разреженной высокотемпературной плазме в течение длительного времени может поддерживаться анизотропия давления, вызванная, например, инжекцией быстрых атомов. В дрейфовом приближении равновесие плазмы с анизотропным давлением описывается формулами (1.24), (1.28). Как показал Град [62], эти уравнения можно объединить в одно векторное уравнение введением вместо плотности тока функции

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{K} = \text{rot } \sigma \mathbf{B}, \quad (3.175)$$

где

$$\sigma = 1 - 4\pi (p_{\parallel} - p_{\perp})/B^2. \quad (3.176)$$

Это уравнение имеет вид

$$\nabla p_{\parallel} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \nabla B^2 + \frac{1}{c} [\mathbf{K}\mathbf{B}]. \quad (3.177)$$

Действительно, умножая (3.177) скалярно на  $\mathbf{B}$ , получаем уравнение продольного равновесия (1.28). Умножая же это уравнение на  $\mathbf{B}$  векторно и учитывая, что в соответствии с определением вектора  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}_{\perp} = \sigma \mathbf{j}_{\perp} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{B}, \nabla (p_{\parallel} - p_{\perp})] - \frac{c(p_{\parallel} - p_{\perp})}{B^4} [\mathbf{B}, \nabla B^2], \quad (3.178)$$

получаем уравнение (1.24).

Исследованию свойств уравнения равновесия (3.177) применительно к тороидальной геометрии посвящена работа [63].

Поперечное и продольное давления теперь непостоянны на магнитной поверхности  $\Psi = \text{const}$ ,  $\mathbf{B}\nabla\Psi = 0$ . В случае осевой симметрии, рассматриваемом ниже, их можно считать функциями двух переменных:  $\Psi$  и  $u$ . За переменную  $u$ , характеризующую положение точки на контуре сечения  $\Psi = \text{const}$ ,  $\zeta = \text{const}$ , можно взять напряженность магнитного поля  $|B|$ , азимутальную переменную  $\theta$ , расстояние  $r$  от главной оси тора и т. д.

Магнитное поле, как и ранее, представим в виде векторной суммы полоидальной и тороидальной компонент:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi r} [\nabla\Psi \mathbf{e}_s] + \frac{2F}{cr} \mathbf{e}_s. \quad (3.179)$$

Подставим это выражение в уравнение равновесия (3.177):

$$\nabla p_{\parallel} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \nabla B^2 - \frac{1}{2\pi r c} \left\{ \nabla \Psi (\mathbf{K} \mathbf{e}_s) - (\mathbf{K} \nabla \Psi) \mathbf{e}_s + \frac{4\pi}{c} F [\mathbf{K} \mathbf{e}_s] \right\}. \quad (3.180)$$

Так как по условию осевой симметрии  $p_{\parallel}$ ,  $B^2$ ,  $\Psi$  не зависят от  $\zeta$ , то при умножении скалярно на  $\mathbf{e}_s$  это уравнение дает

$$\mathbf{K} \nabla \Psi = 0, \quad (3.181)$$

т. е. линии вектора  $\mathbf{K}$  лежат на магнитной поверхности.

В соответствии со своим определением вектор  $\mathbf{K}$  выражается через функции полоидального потока  $\Psi$  и тока  $F$  формулой

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2\pi r} [\nabla \sigma F, \mathbf{e}_s] - \frac{c}{8\pi^2 r} \left( r^2 \operatorname{div} \frac{\sigma \nabla \Psi}{r^2} \right) \mathbf{e}_s. \quad (3.182)$$

Предыдущее условие,  $\mathbf{K} \nabla \Psi = 0$ , приводит к требованию

$$[\nabla \sigma F, \nabla \Psi] = 0, \quad (3.183)$$

т. е.  $\sigma F$  — поверхностная функция, зависящая только от  $\Psi$ .

Записывая теперь входящие в (3.180) градиенты  $p_{\parallel}$  и  $B^2$  в виде

$$\nabla p_{\parallel} = \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \Psi} \nabla \Psi \quad (3.184)$$

и учитывая, что

$$[\mathbf{K} \mathbf{e}_s] := -\frac{\nabla(\sigma F)}{2\pi r} = -\frac{\nabla \Psi}{2\pi r} \frac{d\sigma F}{d\Psi}, \quad (3.185)$$

получаем для составляющих векторного уравнения (3.180) в направлении  $\nabla u$  и  $\nabla \Psi$

$$p_{\perp} = p_{\parallel} - B \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial u} \Big/ \frac{\partial B}{\partial u}; \quad (3.186)$$

$$rK_s = r(\mathbf{K} \mathbf{e}_s) = 2\pi c \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \Psi} r^2 + \frac{F}{\pi c} \frac{d\sigma F}{d\Psi} - \pi c \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \Psi} r^2. \quad (3.187)$$

Первое из этих уравнений позволяет по известной функции  $p_{\parallel}(\Psi, u)$  рассчитывать  $p_{\perp}(\Psi, u)$ , второе связывает плотность тороидального тока

$$j_s = K_s / \sigma + \frac{c}{4\pi} [\nabla \ln \sigma, \mathbf{B}]_s \quad (3.188)$$

с равновесными величинами.

Уравнение для  $\Psi$  дает  $s$ -компонента соотношения (3.182):

$$r^2 \operatorname{div} \frac{\sigma \nabla \Psi}{r^2} = -\frac{8\pi^2}{c} rK_s, \quad (3.189)$$

или [62]

$$\Delta^* \Psi = r^2 \operatorname{div} \frac{\nabla \Psi}{r^2} = -16\pi^3 r^2 \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \Psi} - \frac{16\pi^2}{c^2} F \frac{d\sigma F}{d\Psi} +$$

$$+ 8\pi^3 r^2 \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \frac{\partial B^2}{\partial \Psi} - 4\pi \nabla \Psi \nabla \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2}. \quad (3.190)$$

Примеры решения этого уравнения имеются в работах [64, 65].

Интегральные условия равновесия (2.90) в случае анизотропного давления сохраняют свой вид, если под  $P$  и  $T$  понимать теперь

$$P = p_{\perp} + \frac{B_s^2 - B_{se}^2}{8\pi} + \frac{B_p^2}{B^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}); \quad (3.191)$$

$$T = p_{\parallel} + \frac{B_p^2}{8\pi} - \frac{B_s^2 - B_{se}^2}{8\pi} - \frac{B_p^2}{B^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}). \quad (3.192)$$

Основные изменения сводятся к тому, что в  $P$  входит поперечное, а в  $T$  продольное давление. Последние слагаемые в  $P$  и  $T$  в условиях токамака,  $B_p^2/B^2 \ll 1$ , пренебрежимо малы. В результате в формулу для равновесия по малому радиусу (2.102) войдет  $\beta_{\mathcal{Z}\perp}$ , а в условие равновесия по большому радиусу (2.98) —  $\beta_{\mathcal{Z}\parallel}$ , где

$$\beta_{\mathcal{Z}\perp} = \frac{2c^2 \int p_{\perp} dS_{\Psi}}{\mathcal{Z}^2}, \quad \beta_{\mathcal{Z}\parallel} = \frac{2c^2 \int p_{\parallel} dS_{\Psi}}{\mathcal{Z}^2}. \quad (3.193)$$

При исключении  $\mu_{\mathcal{Z}}$  из (2.98) с помощью (2.102) для удерживающего поля получим

$$B_{\perp} = \frac{\mathcal{Z}}{2cR} \left( \beta_{\mathcal{Z}\perp} + \beta_{\mathcal{Z}\parallel} + s_1 + \frac{\partial L}{2\pi \partial R} \right). \quad (3.194)$$

Соответственно в формулы для относительного смещения внешних магнитных поверхностей вместо  $\beta_{\mathcal{Z}}$  войдет  $(\beta_{\mathcal{Z}\perp} + \beta_{\mathcal{Z}\parallel})/2$  (см. § 4.3).

#### ГЛАВА 4

#### РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Равновесие тороидального плазменного шнура круглого сечения можно описать, пользуясь разложением по кривизне. Систематическое рассмотрение факторов, влияющих на равновесие такого шнура, с акцентом на взаимодействие тока плазмы с элементами конструкции установок токамак было сделано в работе [66], материал которой использован при написании этой главы. Рассмотрено также равновесие шнура круглого сечения с пространственной магнитной осью.



### § 4.1. Приближение малой тороидальности для осесимметричного шнура

Для шнура круглого сечения отклонение тороидальной равновесной конфигурации от соответствующей цилиндрической определяется параметрами  $a/R$  и  $\beta_{\mathcal{Y}} a/R$ , которые можно использовать как параметры разложения при получении решений. Для описания равновесия тора круглого сечения будем пользоваться как лабораторной квазицилиндрической системой координат  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\zeta$

$$r = R - \rho \cos \omega; \quad z = \rho \sin \omega, \quad (4.1)$$

так и натуральной системой координат  $a$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ , связанной с магнитными поверхностями. При малых давлениях плазмы,  $\beta_{\mathcal{Y}} a/R \ll 1$ , тороидальные эффекты проявляются в основном в смещении магнитных поверхностей по большому радиусу, которое обозначим  $\Delta(a)$ . Форма сечений магнитных поверхностей искажается слабо, и ее можно характеризовать параметром эллиптичности  $\alpha$ . Связь цилиндрических координат с натуральными при этом имеет вид

$$\begin{aligned} r &= R + \Delta(a) - (a - \alpha \cos 2\theta) \cos \theta; \\ z &= (a - \alpha \cos 2\theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Параметр  $\alpha \ll a$  и связан с  $\lambda$  (3.154) соотношением  $\alpha = a(\lambda - 1)/2$ ,  $\Delta(0)$  — дает смещение магнитной оси. Обратим внимание на то, что используемая здесь система координат  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\zeta$  отличается от принятой в [66] системы координат  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  отсчетом угла  $\omega$ . Переход от соответствующих формул работы [66] осуществляется заменой угла  $\omega \rightarrow \pi - \omega$  ( $\cos \omega \rightarrow -\cos \omega$ ,  $\sin \omega \rightarrow \sin \omega$ ) и тока  $\mathcal{Y} \rightarrow -\mathcal{Y}$ .

Уравнение равновесия (2.21) в квазицилиндрических координатах в квадратичном по кривизне приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega^2} = & -\frac{8\pi^2}{c} \left( 2\pi c \frac{dp}{d\Psi} r^2 + \frac{1}{c} \frac{dF^2}{d\Psi} \right) \rho^2 - \\ & - \left( \frac{\rho}{R} \cos \omega + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} \cos 2\omega \right) \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \\ & + \left( \frac{\rho}{R} \sin \omega + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} \sin 2\omega \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Составляющие полоидального поля  $B_\rho$ ,  $B_\omega$  связаны с функцией по тока соотношениями

$$B_\rho = \frac{1}{2\pi r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega}, \quad B_\omega = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \quad (4.4)$$

Для дальнейшего понадобятся следующие частные решения однородного ( $dp/d\Psi = 0$ ,  $dF/d\Psi = 0$ ) уравнения (4.3):

$$\begin{aligned}
 \Psi_0^0 &= \frac{4\pi R}{c} \mathcal{Y} \left[ \ln \frac{8R}{\rho} - 2 - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) k\rho \cos \omega + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16} k^2 \rho^2 + \frac{1}{8} k^2 \rho^2 \ln \frac{8R}{\rho} - \frac{1}{16} \left( \ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) k^2 \rho^2 \cos 2\omega \right]; \\
 B_{\omega}^0 &= \frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} \left[ 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{8R}{\rho} k\rho \cos \omega + \left( \frac{3}{8} \ln \frac{8R}{\rho} - \frac{5}{16} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times k^2 \rho^2 \sin 2\omega \right]; \\
 B_{\rho}^0 &= \frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} \left[ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) k\rho \sin \omega + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{3}{8} \ln \frac{8R}{\rho} - \frac{1}{2} \right) k^2 \rho^2 \sin 2\omega \right]; \\
 \Psi_{\text{ext}}^1 &= \frac{4\pi R}{c} \mathcal{Y} \left( k\rho \cos \omega - \frac{1}{4} k^2 \rho^2 - \frac{1}{4} k^2 \rho^2 \cos 2\omega \right); \\
 B_{\omega, \text{ext}}^1 &= -\frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} k\rho \cos \omega, \\
 B_{\rho, \text{ext}}^1 &= -\frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} k\rho \sin \omega; \\
 \Psi_{\text{int}}^1 &= \frac{4\pi R}{c} \mathcal{Y} \left[ k \frac{a^2}{\rho} \cos \omega - \frac{1}{4} k^2 a^2 \cos 2\omega - \frac{1}{2} k^2 a^2 \ln \frac{a}{\rho} \right]; \\
 B_{\omega, \text{int}}^1 &= \frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} \left[ k \frac{a^2}{\rho} \cos \omega + \frac{1}{2} k^2 a^2 \cos 2\omega \right]; \\
 B_{\rho, \text{int}}^1 &= -\frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} k \frac{a^2}{\rho} \sin \omega; \\
 \Psi_{\text{ext}}^2 &= \frac{4\pi R}{c} \mathcal{Y} k^2 \rho^2 \cos 2\omega; \\
 B_{\omega, \text{ext}}^2 &= -\frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} 2k^2 \rho^2 \cos 2\omega; \quad B_{\rho, \text{ext}}^2 = -\frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} 2k^2 \rho^2 \sin 2\omega; \\
 \Psi_{\text{int}}^2 &= \frac{4\pi R}{c} \mathcal{Y} k^2 \frac{a^4}{\rho^2} \cos 2\omega; \\
 B_{\omega, \text{int}}^2 &= \frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} 2k^2 \frac{a^4}{\rho^2} \cos 2\omega; \quad B_{\rho, \text{int}}^2 = -\frac{2\mathcal{Y}}{c\rho} 2k^2 \frac{a^4}{\rho^2} \sin 2\omega.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь и далее  $k = 1/R$ . Под нормировочным током  $\mathcal{Y}$ , если это не указано особо, понимается ток плазмы.

Функция  $\Psi^0$  представляет разложение вблизи оси системы координат функции потока тонкого кольца с током  $\mathcal{I}$  (3.92), которая с точностью до коэффициента совпадает с первым членом ряда (3.48)  $f_0(\eta)/\sqrt{2(\operatorname{ch}\eta - \cos\omega)}$ . При удалении от оси квазицилиндрических координат  $\Psi^0$  переходит в убывающую при  $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$  функцию.

Функции  $\Psi_{\text{ext}}^1$  и  $\Psi_{\text{int}}^1$  являются потоками магнитного поля соответственно внутри и вне тороидальной оболочки с радиусами  $R$ ,  $a$ , по которой течет поверхностный ток

$$i_s^1(\omega) = \frac{\mathcal{I}}{\pi a} \left( ka \cos \omega + \frac{1}{4} k^2 a^2 \cos 2\omega \right), \quad (4.6)$$

Поток  $\Psi_{\text{ext}}^1$  соответствует однородному полю

$$\mathbf{B}_{\text{ext}}^1 = B_z \mathbf{e}_z = -\frac{2\mathcal{I}}{ca} ka \mathbf{e}_z. \quad (4.7)$$

Функции  $\Psi_{\text{ext}}^2$  и  $\Psi_{\text{int}}^2$  можно рассматривать как потоки магнитного поля внутри и вне тороидальной оболочки с поверхностным током вида

$$i_s^2(\omega) = \frac{2\mathcal{I}}{\pi a} k^2 a^2 \cos 2\omega, \quad (4.8)$$

при этом  $\Psi_{\text{ext}}^2$  соответствует квадрупольному полю

$$B_r = \frac{4\mathcal{I}}{ca} k^2 a \rho \sin \omega, \quad B_z = -\frac{4\mathcal{I}}{ca} k^2 a \rho \cos \omega. \quad (4.9)$$

В дальнейшем дипольные поверхностные токи в оболочках будут нормироваться на  $i_s^1(\omega)$ :  $i_s^i(\omega) = ii_s^1(\omega)$ , а потоки однородного поля на  $\Psi_{\text{ext}}^1$ :  $\Psi_{\text{ext}}^i = C\Psi_{\text{ext}}^1$ .

Для квазиоднородного тока,  $dp/d\Psi = \text{const}$ ,  $dF^2/d\Psi = \text{const}$ , легко получить в явном виде решение неоднородного уравнения (4.3) для шнура круглого сечения:

$$\begin{aligned} \Psi_i(\rho, \omega) = & \frac{2\pi R}{c} \mathcal{I} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) k\rho \cos \omega + \right. \\ & + \frac{1}{32} k^2 \frac{\rho^4}{\rho_0^2} + \frac{5}{16} k^2 \rho^2 - \frac{1}{16} \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) k^2 \rho^2 \cos 2\omega \left. \right] - \\ & - \frac{2\pi R}{c} \beta \mathcal{I} \left[ \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) k\rho \cos \omega + \frac{1}{4} k^2 \frac{\rho^4}{\rho_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) k^2 \rho^2 \cos 2\omega \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_0$  — малый радиус шнура;  $\mathcal{I}$  — полный ток плазмы. Считается, что центр плазменного шнура совпадает с началом системы координат. На поверхности плазмы ( $\rho = \rho_0$ )  $\Psi = \text{const}$ . Смещение магнитных поверхностей

$$\Delta(\rho) = \frac{1}{2} \left( \beta \mathcal{I} + \frac{1}{4} \right) \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{R}, \quad (4.11)$$

а параметр эллиптичности

$$\alpha = \rho \left( \frac{1}{4} \beta_{\mathcal{Z}}^2 + \frac{3}{64} \right) \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{R^2}, \quad (4.12)$$

Из внутреннего решения (4.10) можно определить, при каком  $\beta_{\mathcal{Z}}$  полоидальное магнитное поле на внутренней стороне тора ( $\rho = \rho_0$ ,  $\omega = 0$ ) обратится в нуль. Для квазиоднородного тока критическое значение  $\beta_{\mathcal{Z},cr}$  равно:

$$\beta_{\mathcal{Z},cr} = R/\rho_0 + 1/2, \quad (4.13)$$

при этом смещение магнитной оси  $\Delta(0) = \rho_0/2$ , а эллиптичность внутренних поверхностей  $\alpha = \rho_0/4$  (отношение полуосей  $l_z/l_r = 1,6$ ).

Для квазиоднородного тока уравнение (4.3) легко решить и для шнура эллиптического сечения. В линейном по кривизне приближении внутреннее решение имеет вид

$$\Psi_i = \frac{2\pi R}{c} \mathcal{Y} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \left( 1 - \frac{x^2}{l_r^2} - \frac{z^2}{l_z^2} \right) \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{3\lambda^2 + 1} \frac{x}{R} - \beta_{\mathcal{Z}} \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{\lambda(3\lambda^2 + 1)} \left( \frac{x}{R} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{l_r^2}{R^2} \frac{3\lambda^2 + 1}{\lambda^2 + 1} \right) \right],$$

$$x = \rho \cos \omega. \quad (4.14)$$

Здесь  $l_r$  — малая полуось эллипса;  $\lambda$  — отношение полуосей. Отсюда можно получить предельную величину  $\beta_{\mathcal{Z},cr}$  для шнура эллиптического сечения с квазиоднородным током:

$$\beta_{\mathcal{Z},cr} = \frac{R}{l_r} \frac{\lambda(3\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 + 1)^2} \left[ 1 + \frac{l_r}{2R} \left( \frac{\lambda^2 + 1}{3\lambda^2 + 1} + \frac{1}{4} \frac{3\lambda^2 + 1}{\lambda^2 + 1} \right) \right]. \quad (4.15)$$

Коэффициенты, связанные с вытянутостью сечения в (4.15), являются слабыми функциями  $\lambda$  и с 10%-ной точностью (при  $\lambda \leq 2$ ) их можно считать равными 1.

При произвольном распределении тока пользоваться уравнением (4.3) становится неудобно из-за нелинейной зависимости  $p'(\Psi)$  и  $FF'(\Psi)$  и целесообразнее основываться на натуральных координатах. Метрические коэффициенты, которые входят в соотношения между физическими величинами (см. § 2.4) в квадратичном по кривизне приближении (предполагаем, что  $\Delta' \approx a/R$ ,  $\alpha \approx a^2/R^2$ ), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 - 2\Delta' \cos \theta + \Delta'^2 - 2\alpha' \cos 2\theta; \\ g_{12} &= \Delta' a \sin \theta + 2\alpha \sin 2\theta; \\ g_{22} &= a^2 \left( 1 - 2 \frac{\alpha}{a} \cos 2\theta \right); \\ g_{33} &= r^2; \\ \sqrt{g} &= ra \left[ 1 - \Delta' \cos \theta - \left( \frac{\alpha}{a} + \alpha' \right) \cos 2\theta \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Уравнение для смещения и эллиптичности можно получить из уравнения равновесия (2.71), которое удобно записать в виде

$$\frac{\mathcal{F}}{\langle g_{22}/\sqrt{g} \rangle} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \frac{(\widetilde{g_{22}/\sqrt{g}})}{\langle g_{22}/\sqrt{g} \rangle} y - y' \frac{(\widetilde{\sqrt{g}/g_{33}})}{\langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle} \right] - \frac{\mathcal{F}^2}{\langle g_{22}/\sqrt{g} \rangle^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} = \pi c^2 p' \langle \sqrt{g} \rangle \left[ \frac{(\widetilde{\sqrt{g}/g_{33}})}{\langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle} - \frac{(\widetilde{\sqrt{g}})}{\langle \sqrt{g} \rangle} \right]. \quad (4.17)$$

Для фигурирующих здесь комбинаций метрических коэффициентов имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} &= \frac{a}{R} \left[ 1 + \frac{1}{2} \Delta'^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} + \left( \frac{a}{R} + \Delta' \right) \times \right. \\ &\times \cos \theta + \left. \left( \alpha' - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{2} \Delta'^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' \right) \cos 2\theta \right]; \\ \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} &= \frac{a}{R} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{1}{2} \Delta' \frac{a}{R} + \left( -\Delta' + \frac{a}{R} \right) \cos \theta + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{1}{2} \Delta' \frac{a}{R} - \alpha' - \frac{\alpha}{a} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \sqrt{g} &= aR \left[ 1 + \frac{1}{2} \Delta' \frac{a}{R} - \left( \Delta' + \frac{a}{R} \right) \cos \theta + \right. \\ &+ \left. \left( -\alpha' - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{2} \Delta' \frac{a}{R} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} &= \frac{1}{R} \left[ \Delta' \sin \theta + \left( 2 \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{2} \Delta'^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' \right) \sin 2\theta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

При выводе уравнений для  $\Delta$  и  $\alpha$  из (4.17) можно усредненные величины брать в основном (цилиндрическом) приближении. Приравняв коэффициенты при  $\cos \theta$  и  $\cos 2\theta$ , получаем

$$a\Delta'' + \left( \frac{2\mathcal{F}'a}{\mathcal{F}} - 1 \right) \Delta' = -\frac{a}{R} + 2 \frac{\pi c^2 p' a^4}{R\mathcal{F}^2}; \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \alpha\alpha'' + \left( \frac{2a\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} - 1 \right) \alpha' - 3 \frac{\alpha}{a} &= -\frac{\pi c^2 p' a^4}{R\mathcal{F}^2} \left( 3\Delta' + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{a}{R} \Delta' - \frac{a\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} \frac{3}{2} \Delta'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Уравнение (4.19) легко интегрируется после умножения на  $\mathcal{F}^2/a^2$ . В результате

$$\Delta'(a) = -\frac{a}{R} \left[ \frac{1}{2} l_i(a) + \beta\mathcal{F}(a) \right], \quad (4.21)$$

где

$$l_i(a) = \frac{2}{\mathcal{F}^2(a)} \int_0^a \frac{\mathcal{F}^2}{a} da = \frac{\langle B_{\theta}^2 \rangle_a}{B_{\theta}^2(a)}; \quad (4.22)$$

$$\beta \mathcal{F}(a) = \frac{2c^2}{\mathcal{F}^2} 2\pi \int_0^a [p(\rho) - p(a)] \rho d\rho. \quad (4.23)$$

Уравнение для эллиптичности (4.20) при произвольном распределении тока в явном виде не интегрируется. В частном случае однородного тока и параболического давления его решение определяется формулой (4.12).

Рассмотрим основные соотношения между интегральными характеристиками. Связь продольного тока  $\mathcal{Y}(a)$ , протекающего внутри поверхности радиусом  $a$ , с полоидальным потоком  $\Psi'(a)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \mathcal{Y}(a) = - \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \Psi' = - \frac{a}{R_a} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Delta'^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' \right) \Psi'(a). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь  $R_a = R + \Delta(a)$  — большой радиус рассматриваемой магнитной поверхности. Связь продольного потока  $\Phi'(a)$  с полоидальным током  $F$  следующая:

$$\Phi'(a) = \frac{4\pi}{c} F \left\langle \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \right\rangle = \frac{4\pi}{c} F \frac{a}{R} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' \right). \quad (4.25)$$

Учитывая, что продольное поле  $B_s$  связано с полоидальным током  $F$  соотношением

$$B_s = \frac{2F}{cr} = \frac{2F}{cR_a \left( 1 - \frac{a}{R} \cos \theta \right)}, \quad (4.26)$$

можно получить выражение для запаса устойчивости  $q(a) = -\Phi'/\Psi'$  через полный ток и продольное поле

$$q(a) = \frac{F}{\mathcal{Y}} \left\langle \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \right\rangle \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \approx \frac{a}{R_a} \frac{B_{s0}}{2\mathcal{F}/ca} \left( 1 + \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{2} \Delta'^2 \right). \quad (4.27)$$

Здесь  $B_{s0}$  — значение  $B_s$  при  $\theta = \pi/2$ . Коэффициент перед скобкой равен значению  $q$  для соответствующего прямолинейного шнура. Тороидальные поправки, записанные в скобках, следует учитывать для плазмы большого давления ( $\beta \mathcal{F} \sim R/a$ ).

Распределение полоидального поля по магнитной поверхности определяется соотношением

$$B_{\theta}(a, \theta) = \frac{2\mathcal{F}}{c \sqrt{g_{22}}} \frac{\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}}{\left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle} = \frac{2\mathcal{F}}{ca} \left[ 1 - \frac{a}{R} \Lambda \cos \theta + \left( \alpha' + \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{1}{2} \alpha'^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' \right) \cos 2\theta \right]. \quad (4.28)$$

Здесь

$$\Lambda(a) = \beta_{\mathcal{F}}(a) + \frac{1}{2} I_1(a) - 1 \quad (4.29)$$

— коэффициент асимметрии полоидального поля. При малых давлениях ( $\Lambda < 0$ ) полоидальное поле сильнее на внутренней стороне тора, при больших давлениях ( $\Lambda > 0$ ) поле сильнее на внешней стороне тора.

Распределение плотности продольного тока по магнитным поверхностям можно найти, пользуясь формулой (2.64):

$$j_s = j_{s0}(a) \left( 1 + \frac{a}{R} \cos \theta \right) + \frac{\mathcal{F}}{\pi a^2} \frac{\pi c^2 p' a^3}{\mathcal{F}^2} \frac{a}{R} \cos \theta, \quad (4.30)$$

где  $j_{s0}(a) = \mathcal{F}'(a)/2\pi a$ . Как следует из (4.30), распределение плотности продольного тока в тороидальном шнуре асимметрично. При параболическом профиле давления  $p = p_0 (1 - a^2/\rho_0^2)$  третья слагаемое в (4.30) равно  $-2\beta_{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}}{\pi a^2} \frac{a}{R} \cos \theta$ . При малом давлении плазмы,  $\beta_{\mathcal{F}} \ll 1$ , плотность тока больше на внутренней стороне магнитной поверхности ( $\theta = 0$ ). При повышении давления плотность тока увеличивается на внешней стороне тора ( $\theta = \pi$ ) и уменьшается на внутренней. При спадающем к границе плазмы профиле тока и давления, имеющем конечный градиент на периферии плазмы, ток на внутренней стороне тора может даже поменять свое направление.

Перейдем теперь к описанию конфигурации вне плазменного шнура. Функцию потока  $\Psi_e$  полного поля можно найти, решив однородное уравнение (4.3) с условием  $\Psi_e = \text{const}$  на границе шнура:

$$\begin{aligned} \rho \cos \omega &= (a - \alpha \cos 2\theta) \cos \theta - \Delta(\rho); \\ \rho \sin \omega &= (a - \alpha \cos 2\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.31)$$

( $a$  — малый радиус плазмы) и сделав сшивку вакуумного полоидального поля с полем (4.28) на границе плазмы.

Проще, однако, воспользоваться формулой (4.24), дающей связь  $\Psi'$  с полным током  $\mathcal{J}$ , подставив в нее в качестве  $\Delta'$  решение уравнения (4.19) в вакуумной области:

$$\left. \begin{aligned} \Delta'(\rho) &= -\frac{\rho}{R} \left( \ln \frac{\rho}{a} + \frac{l_i}{2} + \beta \mathcal{J} \right); \\ \Delta(\rho) &= -\frac{\rho^2}{2R} \ln \frac{\rho}{a} - \frac{\rho^2}{2R} \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{l_i}{2} + \beta \mathcal{J} - \frac{1}{2} \right) + \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Здесь  $l_i = l_i(a)$ ,  $\beta \mathcal{J} = \beta \mathcal{J}(a)$  вычислены по всему сечению шнура, а  $\Delta = \Delta(a)$  в правой части означает смещение шнура относительно лабораторной системы координат. Для  $\Psi'(a)$  имеем

$$\Psi'(a) = -\frac{4\pi R}{ca} \mathcal{J} \left( 1 + \frac{\Delta}{R} - \frac{1}{2} \frac{a}{R} \Delta' - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} - \frac{1}{2} \Delta'^2 \right), \quad (4.33)$$

В дальнейшем мы ограничимся в основном линейным приближением по кривизне, тогда для функции потока  $\Psi_e$  будем иметь

$$\Psi_e(a) = \frac{4\pi R}{c} \mathcal{J} \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right) + \text{const}, \quad (4.34)$$

или в лабораторной системе координат

$$\begin{aligned} \Psi_e(\rho, \omega) &= \frac{4\pi R}{c} \mathcal{J} \left[ \ln \frac{8R}{\rho} - 2 - \frac{\Delta(\rho)}{\rho} - \cos \omega \right] + \\ &+ \text{const} = \frac{4\pi R}{c} \mathcal{J} \left\{ \ln \frac{8R}{\rho} - 2 - \frac{\Delta}{\rho} \cos \omega + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{\rho}{a} + \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{l_i}{2} + \beta \mathcal{J} - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\rho}{R} \cos \omega \right\} + \text{const}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Аддитивная константа в  $\Psi_e$ , которая не сказывается на описании равновесия, в дальнейшем будет опущена.

Функцию потока  $\Psi_e$  равновесного поля можно записать также в виде

$$\Psi_e = \Psi_{pl} + \Psi_{\text{ext}}, \quad (4.36)$$

где  $\Psi_{pl}$  — поток собственного поля плазмы:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{pl} &= \Psi^0(\rho, \omega) + \left( C_{pl}^1 - \frac{R\Delta}{a^2} \right) \Psi_{\text{int}}^1(\rho, \omega); \\ C_{pl}^1 &\equiv -\frac{1}{2} \left( \frac{l_i}{2} + \beta \mathcal{J} - \frac{1}{2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

$\Psi_{\text{ext}}$  — поток удерживающего поля:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\text{ext}} &= C_{\text{ext}}^1 \Psi_{\text{ext}}^1(\rho, \omega); \\ C_{\text{ext}}^1 &\equiv \frac{1}{2} \left( \ln \frac{2R}{a} + \beta \mathcal{J} + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right); \\ B_{z, \text{ext}} &= -\frac{2\mathcal{J}}{cP} C_{\text{ext}}^1 = -\frac{\mathcal{J}}{cR} \left( \ln \frac{8R}{a} + \beta \mathcal{J} + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$



Таким образом, в первом приближении разложения по кривизне получаем, что для поддержания равновесия тороидального шнура круглого сечения необходимо однородное удерживающее поле (4.38).

Приведенные выше формулы дают возможность вычислить удерживающее поле более точно и, в частности, найти его показатель спада. Для этого достаточно выписать выражение для  $\Psi_e$  в квадратичном приближении по кривизне и затем сделать разложение типа (4.36). Можно, однако, воспользоваться принципом виртуального кожуха, так как известное распределение полоидального поля по поверхности шнура (4.28) дает явное выражение поверхностного тока, создающего удерживающее поле:

$$\frac{4\pi}{c} i_{s, \text{ext}} = -B_\theta(a, \theta). \quad (4.39)$$

Прежде чем переходить к отысканию поля этого тока, решим две вспомогательные задачи.

**1. Распределение тока  $i_s^0(\omega)$  на поверхности сверхпроводящего тора.** Пусть  $\rho = a - \alpha \cos 2\omega$  — уравнение поверхности сверхпроводящего тора, по которому пропущен ток  $\mathcal{I}$ . Функция потока  $\Psi_e$  вне тора будет равна:

$$\Psi_e(\rho, \omega) = \Psi^0 + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{8R}{a} - 1 \right) \Psi_{\text{int}}^1 + \left( \frac{3}{16} \ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{a} \right) \Psi_{\text{int}}^2. \quad (4.40)$$

Она удовлетворяет условию  $\Psi_e(a - \alpha \cos 2\omega, \omega) = \text{const}$ , откуда

$$i_s^0(\omega) = \frac{\mathcal{I}}{2\pi a} \left[ 1 + \frac{a}{R} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} \right) \cos \omega + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{R^2} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{17}{16} \right) \cos 2\omega - \frac{\alpha}{a} \cos 2\omega \right]. \quad (4.41)$$

С точностью до 10% эта формула справедлива вплоть до  $R/a = 3$ . Внутри тора такое распределение тока поля не создает.

**2. Магнитное поле распределенного поверхностного тока.** Пусть по тороидальной оболочке с радиусами  $R, a$  (а также эллиптичностью  $\alpha$ ) распределен поверхностный ток  $i_s = i(\omega)$  по закону

$$i_s(\omega) = \frac{\mathcal{I}}{2\pi a} (1 + k a i_1 \cos \omega + k^2 a^2 i_2 \cos 2\omega). \quad (4.42)$$

Определим его поле внутри и вне оболочки. Для этого достаточно переписать (4.42) в виде разложения по  $i_s^0(\omega)$  (4.40),  $i_s^1(\omega)$  (4.6),  $i_s^2(\omega)$  (4.8):

$$i_s(\omega) = i_s^0(\omega) + \frac{1}{2} \left( i_1 - \ln \frac{8R}{a} + \frac{1}{2} \right) i_s^1(\omega) + \\ + \frac{1}{4} \left( i_2 - \frac{1}{4} i_1 - \frac{3}{4} \ln \frac{8R}{a} + \frac{15}{16} + \frac{\alpha}{k^2 a^2} \right) i_s^2(\omega). \quad (4.43)$$

Поля каждого из трех слагаемых в правой части (4.43) были определены ранее. В частности, внутри оболочки  $i_s^1(\omega)$  создает однородное поле (4.7),  $i_s^2(\omega)$  — квадрупольное поле (4.9). Ток  $i_s^0(\omega)$  поля внутри оболочки не создает.

Сопоставляя (4.39) с формулами (4.42), (4.43), ток виртуального кожуха  $i_{s, \text{ext}}$  (4.39) можно записать в виде

$$i_{s, \text{ext}} = -i_s^0(\omega) + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{8R}{a} + \beta \mathcal{F} + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right) i_s^1(\omega) + \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{4} \ln \frac{8R}{a} - \frac{19}{16} + \frac{1}{4} \left( \beta \mathcal{F} + \frac{l_i}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \beta \mathcal{F} + \frac{l_i}{2} \right)^2 - \frac{\alpha' + \alpha/a}{k^2 a^2} \right] i_s^2(\omega), \quad (4.44)$$

отсюда функция потока удерживающего поля равна:

$$\Psi_{\text{ext}} = C_{\text{ext}}^1 \Psi_{\text{ext}}^1 + C_{\text{ext}}^2 \Psi_{\text{ext}}^2; \quad \left. \begin{aligned} C_{\text{ext}}^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{4} \ln \frac{8R}{a} - \frac{19}{16} + \frac{i}{4} \left( \beta \mathcal{F} + \frac{l_i}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \beta \mathcal{F} + \frac{l_i}{2} \right)^2 - \frac{R^2}{a^2} \alpha' - \frac{R^2}{a^3} \alpha \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Магнитное поле  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  характеризуется своей средней частью (4.38), полученной ранее, и показателем спада

$$n \equiv - \frac{r}{B_{z, \text{ext}}} \frac{dB_{z, \text{ext}}}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{2C_{\text{ext}}^2}{C_{\text{ext}}^1}. \quad (4.46)$$

Для шнура с однородным током и параболическим давлением (4.46) переходит в выражение

$$n = \frac{\frac{3}{4} \ln \frac{8R}{a} - \frac{17}{16} - \frac{R^2}{a^2} \left( \frac{l_z}{l_r} - 1 \right)}{\ln \frac{8R}{a} + \beta \mathcal{F} - \frac{5}{4}} \quad (4.47)$$

( $l_z, l_r$  — полуоси сечения).

Отрицательный показатель спада соответствует неустойчивости плазмы по отношению к смещениям по вертикали. Шнур круглого сечения ( $l_z = l_r$ ) имеет  $n > 0$  и обладает устойчивостью по отношению к таким возмущениям.

## § 4.2. Влияние элементов конструкции на равновесие

Для обеспечения равновесия по большому радиусу требуется создать приблизительно однородное поле, определяемое формулой (4.38). В установках токамак для создания этого поля имеются специальные обмотки равновесия. Кроме того, источниками удерживающего поля являются токи Фуко, наводимые в кожухе, лайнере установки, и токи

намагничивания железного сердечника. На равновесие плазмы по большому радиусу влияет только усредненная по азимуту  $\zeta$  поперечная составляющая ( $B_{z, \text{ext}}$ ) этого поля. Квадрупольная и составляющие более высокой мультипольности влияют только на форму сечения шнура. Ниже, следуя в основном работе [66], будут рассмотрены основные факторы, влияющие на равновесие.

**1. Равновесие в сплошном идеальнопроводящем кожухе.** Этот случай является идеализацией распространенного способа поддержания равновесия с помощью хорошо проводящего кожуха. Положение шнура относительно сечения кожуха можно определить, поставив условие  $\Psi(b, \omega) = \text{const}$  на функцию потока равновесного поля (4.35) ( $b$  — радиус кожуха). В результате находим смещение шнура

$$\frac{\Delta}{b} = \frac{b}{2R} \left[ \ln \frac{b}{a} + \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \left( \frac{l_i}{2} + \beta \mathcal{F} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4.48)$$

Эта же формула определяет смещение любой вакуумной магнитной поверхности радиусом  $a$ . В дальнейшем смещение (4.48), соответствующее идеальнопроводящему кожуху, будет обозначаться  $\Delta_0$ .

**2. Равновесие в идеальнопроводящем кожухе с разрезами.** При наличии разреза необходимо учесть проникновение через них части магнитного потока [граничное условие (3.118)]. В тороидальном кожухе круглого сечения поверхностный ток, фигурирующий в (3.118), распределен по закону  $i_s(\omega) \sim \cos \omega$ . Удобно нормировать поверхностный ток на  $i_s^1(\omega)$  (4.6):

$$i_s(\omega) = i_b i_s^1(\omega). \quad (4.49)$$

Рассмотрим для общности следующую ситуацию. Пусть между плазмой и кожухом на радиусе  $b_1$  имеется обмотка, ток в которой аппроксимируется поверхностным током

$$i_{s, \text{int}} = i_{\text{int}} i_s^1(\omega). \quad (4.50)$$

Кроме того, имеется внешняя обмотка, поле которой разобьем на стационарную (прошедшую через кожух без искажений)

$$\Psi_{\text{ext}}^{\text{st}}(\rho, \omega) = C^{\text{st}} \Psi_{\text{ext}}^1(\rho, \omega),$$

$$C^{\text{st}} = -B_{z, \text{ext}}^{\text{st}} \frac{cR}{2\mathcal{F}} \quad (4.51)$$

и «переменную» части

$$\Psi_{\text{ext}}^{\text{al}}(\rho, \omega) = C^{\text{al}} \Psi_{\text{ext}}^1(\rho, \omega), \quad C^{\text{al}} = -B_{z, \text{ext}}^{\text{al}} \frac{cR}{2\mathcal{F}}, \quad (4.52)$$

влияющие на равновесие только через разрезы;  $B_{\mathcal{F}, \text{ext}}^{\text{al}}$  — амплитуда поля этой составляющей при отсутствии кожуха.

Функция потока такой системы имеет вид:

1) между плазмой и внутренней обмоткой ( $a \leq \rho < b_1$ ):

$$\Psi^1 = \Psi^0 + \left( C_{\text{pl}}^1 - \frac{\Delta R}{a^2} \right) \Psi_{\text{int}}^1 + C_{\text{ext}}^1 \Psi_{\text{ext}}^1; \quad (4.53)$$

2) между внутренней обмоткой и кожухом ( $b_1 \leq \rho < b$ ):

$$\Psi^{II} = \Psi^I + i_{\text{int}} \left( \Psi_{\text{int}}^1 \frac{b_1^2}{a^2} - \Psi_{\text{ext}}^1 \right); \quad (4.54)$$

3) вне кожуха ( $b \leq \rho$ ):

$$\Psi^{III} = \Psi_e^{II} + i_b \left( \Psi_{\text{int}} \frac{b^2}{a^2} - \Psi_{\text{ext}}^1 \right). \quad (4.55)$$

Приравнивая в  $\Psi^{III}$  коэффициент при  $\Psi_{\text{ext}}^1$  заданному полю внешних обмоток, получаем значение тока в кожухе:

$$i_b = C_{\text{ext}}^1 - i_{\text{int}} - C^{\text{st}} - C^{\text{al}}. \quad (4.56)$$

Граничное условие (3.118) на кожухе с разрезами при наличии стационарного поля записывается в виде

$$\Psi^{III}(b, \omega) = C^{\text{st}} \Psi_{\text{int}}^1(b, \omega) - \frac{2\pi}{c} b \sum h_{\text{eff}} i_b i_s^1(\omega) + \text{const}, \quad (4.57)$$

где  $\sum h_{\text{eff}}$  — суммарная эффективная ширина всех разрезов. Подставляя (4.55) в (4.57), получаем величину смещения

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{b} = \frac{\Delta_0}{b} - \frac{b}{R} i_{\text{int}} \left( 1 - \frac{b_1^2}{b^2} \right) + B_{z, \text{ext}}^{\text{st}} \frac{cb}{2\mathcal{F}} + \frac{\sum h_{\text{eff}}}{2\pi R} \left[ -\frac{b}{R} i_{\text{int}} + \right. \\ \left. + \frac{cb}{2\mathcal{F}} (B_{z, \text{ext}}^{\text{st}} + B_{z, \text{ext}}^{\text{al}} - B_{z, \text{ext}}) \right]. \quad (4.58) \end{aligned}$$

Здесь  $B_{z, \text{ext}}$  — величина требуемого для равновесия удерживающего поля (4.38),  $h_{\text{eff}} = \pi b / (\ln L/h + \sqrt{2d/h})$  — эффективная ширина разреза (3.122).

Отметим, что здесь все поле внутренней обмотки считалось переменным. Очевидно, что стационарная часть поля войдет в формулу точно так же, как и  $B_{z, \text{ext}}^{\text{st}}$  внешней обмотки.

При замыкании тока вдоль разреза из-за наличия продольного поля  $B_s$  возникает сила  $F_z$ , действующая на секции кожуха. Она приложена к кромкам секций вблизи разреза и равна:

$$F_z = \frac{\mathcal{F} B_s}{c} \frac{b^2}{R} i_b = \frac{b^2}{2} B_s \left[ -B_{z, \text{ext}} - \frac{2\mathcal{F}}{cR} i_{\text{int}} + B_{z, \text{ext}}^{\text{al}} + B_{z, \text{ext}}^{\text{st}} \right]. \quad (4.59)$$

Знак силы  $F_z$  различен по разные стороны от разреза.

**3. Равновесие при наличии железного сердечника.** Система возбуждения и поддержания тока во многих установках токамак выполнена по схеме трансформатора с железным сердечником. Наличие последнего значительно усложняет расчет магнитной системы, во-первых, в связи с его сложной формой, а во-вторых, из-за нелинейности магнитной проницаемости железа. Рассмотрим общую методику учета ферромагнетика в задачах равновесия.

Магнитное поле в ферромагнетике описывается уравнением

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = 0, \quad (4.60)$$

где  $\mu = \mu(r, B)$  — магнитная проницаемость. Граничные условия на поверхности ферромагнетика имеют вид

$$B_{ne} = B_{nc}, \quad \frac{1}{\mu} B_{\tau i} = B_{\tau e}. \quad (4.61)$$

Знаки  $i, e$  относятся соответственно к области ферромагнетика ( $\mu \neq 1$ ) и внешней области ( $\mu = 1$ ).

Для осесимметричных систем (4.60) сводится к уравнению для функции потока  $\Psi$ :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \quad (4.62)$$

В модели  $\mu = \text{const}$  задачи с ферромагнетиком можно решать аналогично магнитостатическим задачам (см. § 3.5). В этом случае токи намагничивания можно заменить поверхностным током  $i_s^f$ , протекающим вдоль границы ферромагнетика  $\Gamma$ . Для отыскания распределения  $i_s^f(l)$  служит второе граничное условие (4.61):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left[ B_{\tau, \text{ext}}(l) - \frac{2\pi}{c} i_s^f(l) + \oint b_{\tau}(l; l') i_s^f(l') dl' \right] = \\ = B_{\tau, \text{ext}} + \frac{2\pi}{c} i_s^f(l) + \oint b_{\tau}(l; l') i_s^f(l') dl'. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Здесь  $B_{\tau, \text{ext}}$  — тангенциальная компонента поля токов, расположенных вне ферромагнетика, а  $b_{\tau}(l; l')$  определяется формулами (3.85)—(3.87). При  $\mu \rightarrow \infty$  это граничное условие (4.61) сводится к занулению тангенциальной компоненты поля на внешней поверхности ферромагнетика:  $B_{\tau e} = 0$ .

Для  $\mu \neq \text{const}$  необходимо решать уравнение (4.62), которое с учетом зависимости  $\mu(B^2)$  является нелинейным, при этом расчет поля в ферромагнетике становится сравнимым по трудоемкости с решением двумерных задач равновесия. Однако в ряде случаев можно получить такие характеристики магнитной системы с железным сердечником, которые можно использовать в задачах равновесия самостоятельно, без двумерных расчетов поля в ферромагнетике [67].

Будем считать, что магнитная система состоит из обмотки возбуждения с током  $I_{\text{ind}}$  и обмотки равновесия с током  $I_{\text{eq}}$ . Выражение для вертикального поля в области плазмы можно представить в виде

$$B_{z, \text{ext}} = b_{\text{ind}}(\Psi_f, \Delta) I_{\text{ind}} + b_{\text{eq}}(\Psi_f, \Delta) I_{\text{eq}} + b_{\text{pl}} \left( \Psi_f, C_{\text{pl}}^1 - \frac{\Delta R}{a^2} \right) \mathcal{Y}. \quad (4.64)$$

Здесь  $\mathcal{Y}$  — полный ток плазмы. Считается, что коэффициенты  $b_{\text{ind}}$ ,  $b_{\text{eq}}$  являются функциями полного потока в железе  $\Psi_f$  и положения

плазмы по большому радиусу. Коэффициент  $b_{p1} \left( \Psi_f, C_{p1}^1 - \frac{\Delta R}{a^2} \right) = b_{p1} \left( \Psi_f, \beta_{\mathcal{F}} + \frac{l_i}{2} + \frac{2\Delta R}{a^2} \right)$  характеризует взаимодействие тока плазмы с железным сердечником.

Каждый из коэффициентов в (4.64) можно линеаризовать по второму аргументу

$$\left. \begin{aligned} b_{\text{ind, eq}}(\Psi_f, \Delta) &= b_{\text{ind, eq}}(\Psi_f, 0) + \frac{\partial b_{\text{ind, eq}}}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} \Delta, \\ b_{p1} \left( \Psi_f, \beta_{\mathcal{F}} + \frac{l_i}{2} - \frac{2R\Delta}{a^2} \right) &= b_{p1}(\Psi_f, 0) + \frac{\partial b_{p1}}{\partial \beta_{\mathcal{F}}} \Big|_{\substack{\Delta=0 \\ l_i=0,5 \\ \beta_{\mathcal{F}}=0}} \times \\ &\times \left( \beta_{\mathcal{F}} + \frac{l_i}{2} + \frac{2R\Delta}{a^2} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \right\} (4.65)$$

В результате для описания вертикального поля оказывается достаточно шести характеристик, являющихся функциями только магнитного потока  $\Psi_f$  в железном сердечнике. Как отмечено в [67], поток можно считать функцией параметра  $I_{\text{ind}} + I_{\text{eq}} + (k_1 + k_2\Delta)\mathcal{F}$ . Все эти одномерные зависимости можно заранее рассчитать для каждой конкретной магнитной системы на основе двумерных (или трехмерных) кодов, а затем использовать в задачах равновесия самостоятельно.

**4. Равновесие в кожухе конечной проводимости.** В кожухе конечной проводимости для поддержания тока необходима ЭДС. Если не рассматривать процесс проникновения тока в толщу стенки кожуха, который идет со временем  $\tau_{\text{sk}} = \pi \sigma d^2 / c^2$  ( $d$  — толщина стенки), то связь поверхностного тока на кожухе с изменением потока имеет вид

$$i_s = \sigma d E_s = - \frac{\sigma d}{2\pi R c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (4.66)$$

Рассмотрим на базе (4.66) некоторые магнитостатические задачи.

а) *Проникновение внешнего однородного поля через сплошной кожух.* Пусть внешние обмотки создают меняющееся во времени поле, поток которого равен  $C_e(t) \Psi_{\text{ext}}^1$ . Внутри кожуха поток равен

$$\Psi_i = (C_e(t) + i_b) \Psi_{\text{ext}}^1 = C_i(t) \Psi_{\text{ext}}^1, \quad (4.67)$$

а вне его

$$\Psi_e = C_e(t) \Psi_{\text{ext}}^1 + i_b \Psi_{\text{int}}^1 \quad (4.68)$$

[ $i_b$  — амплитуда тока в кожухе  $i_s(\omega) = i_b i_s^1(\omega)$ ]. Отсюда для тока кожуха имеем уравнение

$$i_b = -\tau_b \frac{d}{dt} [C_e(t) + i_b], \quad \tau_b = 2\pi \sigma d b / c^2. \quad (4.69)$$

Амплитуда поля внутри кожуха

$$C_i(t) = \int_{-\infty}^t C_e(t') \exp[(t'-t)/\tau_b] dt' / \tau_b. \quad (4.70)$$

Таким образом, проникновение однородного поля через кожух характеризуется постоянной времени  $\tau_b$ .

б) *Движение плазменного шнура в кожухе конечной проводимости.* Пусть плазменный шнур находится в стационарном поле  $C_e \Psi_{\text{ext}}^1$  и окружен кожухом конечной проводимости. Ток в кожухе возбуждается только за счет движения шнура:

$$i_b i_s^1 = \frac{\sigma d}{2\pi R c} \frac{R}{a^2} \frac{d\Delta}{dt} \Psi_{\text{int}}(b, \omega). \quad (4.71)$$

Так как значение тока в кожухе известно из условия равновесия, для скорости шнура получаем

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{b}{\tau_b} \frac{b}{R} (C_{\text{ext}}^1 - C_e) = \frac{b}{\tau_b} \frac{b}{2R} \left( \ln \frac{8R}{a} + \beta \mathcal{F} + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} + \frac{B_z c R}{\mathcal{F}} \right). \quad (4.72)$$

Движение шнура по большому радиусу характеризуется, как следует из (4.73), постоянной времени  $\tau_R = \tau_b 2R/b$ .

в) *Движение шнура в кожухе конечной проводимости с разрезами.* При наличии разрезов в кожухе конечной проводимости появляется, во-первых, непосредственное проникновение магнитного потока через разрезы, а во-вторых, перемыкание несимметричной части тока вдоль кромок разрезов, что изменяет закон затухания тока в кожухе. Его уже нельзя характеризовать одной постоянной времени (4.69).

Рассмотрим сначала проникновение внешнего поля через кожух с разрезами. Зависимость внутреннего поля (4.67) от времени можно представить в общем виде следующим образом:

$$C_i(t) = \frac{h}{1+h} C_e(t) + \frac{1}{1+h} \int_{-\infty}^t C_e(t') g(t-t') dt'. \quad (4.73)$$

Здесь  $h = \Sigma h_{\text{eff}} / 2\pi R$ . Аналитический вид функции  $g(t-t')$  неизвестен, и поэтому соотношение (4.73) следует использовать для экспериментального определения этой характеристики кожуха. Если предположить, что кожух характеризуется одной постоянной времени  $\tau$ , то  $g(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)$ . При этом уравнение (4.73) эквивалентно следующему условию на амплитуду тока кожуха:

$$i_b = - \frac{\tau}{1+h} \frac{d}{dt} (C(t) + i_b), \quad (4.74)$$

где  $C(t)$  — амплитуда потока на радиусе кожуха. По сравнению с (4.69) здесь фактически добавился поток магнитного поля, связанный с разрезами, и изменилась постоянная времени ( $\tau \neq \tau_b$ ).

Для произвольной  $g(t)$  из соотношения (4.73) можно найти амплитуду тока в кожухе:

$$i_b = -\frac{1}{1+h} C(t) + \frac{1}{1+h} \int_{-\infty}^t C(t') g(t-t') dt'. \quad (4.75)$$

Индекс  $e$  у константы  $C$  опущен, так как формула (4.75) пригодна и для случая, когда источники поля расположены внутри кожуха, при этом под  $C$  надо понимать амплитуду падающего потока.

Перейдем теперь к описанию движения шнура. Для общности рассмотрим магнитную систему, описанную в п. 2. Чтобы учесть возможные изменения тока плазмы  $\mathcal{F}(t)$ , будем явно учитывать его в амплитуде соответствующих полей. Ток  $i_b$  в кожухе определяется условием равновесия (4.56):

$$i_b = \frac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}} C_{\text{ext}}^1 - i_{\text{int}} - C_{\text{ext}}^{\text{st}} - C_{\text{ext}}^{\text{al}}, \quad \mathcal{F} = \text{const}. \quad (4.76)$$

Амплитуда падающего потока

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}} \left( \ln \frac{8R}{a} - 1 \right) + \frac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}} \left( \frac{a^2}{b^2} C_{\text{pl}}^1 - \frac{\Delta R}{b^2} \right) + C_{\text{ext}}^{\text{al}} + i_{\text{int}} \frac{b_1^2}{b^2} = \frac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}} \frac{\Delta_0 - \Delta}{b^2} R + C_{\text{ext}}^{\text{al}} + i_{\text{int}} \frac{b_1^2}{b^2} - \frac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}} C_{\text{ext}}^1. \quad (4.77)$$

Подставляя (4.77) и (4.76) в (4.75), получаем следующее уравнение для смещения:

$$\frac{2\mathcal{F}(t)}{cb} \frac{\Delta - \Delta_g}{b} = \int_{-\infty}^t \left[ \frac{2\mathcal{F}(t')}{cb} \frac{\Delta - \Delta_0}{b} - \frac{2\mathcal{F}_0}{cb} i_{\text{int}} \frac{b_1^2}{b^2} + B_{z, \text{ext}}^{\text{al}} - B_{z, \text{ext}}(t') \right] g(t-t') dt'. \quad (4.78)$$

Здесь  $\Delta_g$  — смещение в идеальном кожухе с разрезами (4.58),  $\Delta_0$  — смещение в идеально-проводящем сплошном кожухе (4.48). Для модельной  $g(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)$  интегральное уравнение (4.78) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{2\mathcal{F}(t)}{cb} \frac{\Delta - \Delta_g}{b} = \frac{1+h}{\tau} (B_z - B_{z, \text{ext}}), \quad (4.79)$$

где  $B_z$  — суммарное поле всех обмоток:

$$B_z = B_z^{\text{al}} + B_z^{\text{st}} - \frac{2\mathcal{F}}{cb} i_{\text{int}}. \quad (4.80)$$

Зависимость от параметров плазмы  $\beta \mathcal{F}(t)$ ,  $l_i(t)$  входит в (4.78), (4.79) через  $\Delta_g$ ,  $\Delta_0$ ,  $B_{z, \text{ext}}$ .



**5. Влияние токов, замыкающихся на диафрагму, на равновесие шнура.** Если магнитные поверхности пересекают диафрагму, то возможно возникновение полоидальных токов, протекающих с верхней на нижнюю кромку диафрагмы вдоль разомкнутых поверхностей. Взаимодействуя с продольным полем, эти токи создают силу, направленную по большому радиусу

$$F_r = -\frac{1}{c} I_z B_s 2d, \quad (4.81)$$

где  $d$  — радиус диафрагмы, что эквивалентно введению поперечного поля

$$B_z = -\frac{I_z}{\mathcal{F}} B_s \frac{d}{\pi R}. \quad (4.82)$$

Детальное рассмотрение равновесия с учетом токов через диафрагму сделано в работах [68, 69].

Существенную роль такой механизм поддержания равновесия играет на начальной стадии разряда, когда замкнутая магнитная конфигурация еще не сформирована [70].

#### § 4.3. Равновесие шнура круглого сечения с анизотропным давлением

Рассмотрим уравнения равновесия плазмы с анизотропным давлением в натуральных координатах, предполагая выполненным условие осевой симметрии. Из условия  $\mathbf{K} \nabla \Psi$  (3.181) и  $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$  для контрвариантных компонент  $K^i$  имеем

$$K^i = \left\{ 0, -\frac{F'_k}{2\pi \sqrt{g}}, \frac{\mathcal{Y}'_k + \frac{\partial v_k}{\partial \theta}}{2\pi \sqrt{g}} \right\}, \quad (4.83)$$

где  $F_k(a)$ ,  $\mathcal{Y}_k(a)$  — полоидальный и продольный потоки вектора  $\mathbf{K}$ . Из уравнения (3.175) получаем выражение для ковариантных компонент вектора  $\sigma \mathbf{B}$ :

$$\sigma B_i = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial a} - v_k, \mathcal{Y}_k + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \theta}, F_k \right\}, \quad (4.84)$$

Система уравнений для плазмы с анизотропным давлением, аналогичная (2.61)—(2.63), имеет вид

$$4\pi^2 c \sqrt{g} \left( \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial a} - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \frac{\partial B^2}{\partial a} \right) = -F'_k \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) + \Psi' \left( \mathcal{Y}'_k + \frac{\partial v_k}{\partial \theta} \right); \quad (4.85)$$

$$\frac{4\pi}{c} \left( \mathcal{Y}'_k + \frac{\partial v_k}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial a} \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \sigma \Psi' + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \sigma \Psi'; \quad (4.86)$$

$$\frac{4\pi}{c} F_k = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \sigma \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right); \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \theta} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{2B^2} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial \theta}; \quad (4.88)$$

$$\sigma = 1 - 4\pi(p_{\parallel} - p_{\perp})/B^2. \quad (4.89)$$

Для плазмы с анизотропным давлением равновесная конфигурация определяется внешними полями и распределением продольного давления  $p_{\parallel}(a, \theta)$  и тока  $\mathcal{Y}_k(a)$ .

Рассмотрим равновесие плазменного шнура круглого сечения. Будем считать, что формулы для давления плазмы имеют вид

$$p_{\parallel}(a, \theta) = p_{\parallel 0}(a) + p_{\parallel 1}(a) \cos \theta; \quad (4.90)$$

$$p_{\perp}(a, \theta) = p_{\perp 0}(a) + p_{\perp 1}(a) \cos \theta. \quad (4.91)$$

В сильном продольном поле

$$|\mathbf{B}| \approx B_s = B_s (1 + ka \cos \theta). \quad (4.92)$$

С учетом (4.88) формулу (4.90) можно записать в виде

$$p_{\parallel}(a, \theta) = p_{\parallel 0}(a) + ka(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) \cos \theta, \quad p_{\parallel 1} = ka(p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}). \quad (4.93)$$

Величину  $\sigma$  с достаточной точностью можно считать функцией магнитной поверхности:  $\sigma = \sigma(a)$ .

Как и ранее, предположим, что магнитные поверхности являются торами круглого сечения. Метрика натуральной системы координат в этом случае описывается формулами (4.15), (4.18). В нулевом и первом приближениях по параметру  $ka$  уравнение (4.85) имеет вид

$$4\pi^2 caR p'_{\parallel 0} = \Psi' \mathcal{Y}'_k - \frac{4\pi}{c} F'_k F_k \frac{a}{R}; \quad (4.94)$$

$$4\pi^2 c \sqrt{\tilde{g}} p'_{\parallel 0} + 4\pi^2 caR p'_{\parallel 1} \cos \theta = (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) 4\pi^2 ca \cos \theta + \\ + \Psi' \frac{\partial v_k}{\partial \theta} - \frac{4\pi}{c} F'_k F_k \left( \frac{\sqrt{\tilde{g}}}{g_{33}} \right). \quad (4.95)$$

Уравнение (4.94) можно переписать так, чтобы в него входили реальные токи  $\mathcal{Y}(a)$ ,  $F(a)$ . Поскольку  $\mathcal{Y}_k(a) \approx \mathcal{Y}(a)$ ,  $F_k(a) = \sigma F(a)$ , из (4.94) получаем

$$4\pi^2 caR p'_{\perp 0} = \Psi' \mathcal{Y}' - \frac{4\pi}{c} FF' a/R. \quad (4.96)$$

Таким образом, в уравнение равновесия по малому радиусу входит только поперечное давление (см. § 3.7). Соответственно интегральное условие баланса давлений (2.9) для плазмы анизотропного давления приобретает вид

$$\beta_{\mathcal{Y}_{\perp}} = 1 + \mu_{\mathcal{Y}}, \quad \beta_{\mathcal{Y}_{\perp}} = \frac{2c^2 \int p_{\perp} a da d\theta}{\mathcal{Y}^2}. \quad (4.97)$$

Исключая из (4.95)  $F_r F'_k$  с помощью (4.94), а  $p_{||}$  с помощью (4.93), приходим к уравнению для смещения магнитных поверхностей

$$a\Delta'' + \left( \frac{2a\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} - 1 \right) \Delta' = -\frac{a}{R} + \frac{\pi c^2 a^4}{R\mathcal{F}^2} (p'_{||0} + p'_{\perp 0}). \quad (4.98)$$

Единственным отличием (4.98) от уравнения (4.19) с изотропным давлением является замена величины  $2p$  на  $(p_{||0} + p_{\perp 0})$ . Поэтому ранее полученные формулы для смещения плазмы и удерживающего поля остаются справедливыми, если сделать замену

$$\beta_{\mathcal{F}} \rightarrow (\beta_{\mathcal{F}} + \beta_{\mathcal{F}'})/2, \quad \beta_{\mathcal{F}'} = \frac{2c^2 \int p_{||} a da d\theta}{\mathcal{F}^2}. \quad (4.99)$$

В рассмотренном приближении не фигурирует величина  $p_{\perp 1}(a)$  (4.91). Поэтому первое приближение по  $a/R$  в уравнениях равновесия не определяет смещение поверхностей  $p_{\perp} = \text{const}$  относительно магнитных. Распределение продольного давления  $p_{||}(a, \theta)$  определяется формулой (4.93). При  $p_{||0} > p_{\perp 0}$  поверхности  $p_{||} = \text{const}$  смещены внутрь относительно магнитных, при  $p_{||0} < p_{\perp 0}$  — наружу.

#### § 4.4. Устойчивость равновесия плазменного шнура

Под устойчивостью равновесия понимается гидромагнитная устойчивость плазмы по отношению к осесимметричным возмущениям. Для шнура произвольного сечения исследование устойчивости равновесия представляет самостоятельную задачу, связанную с решением двумерных уравнений движения [71]. Для шнура круглого сечения в приближении большого аспектного отношения ( $R/a \gg 1$ ) задача упрощается, так как собственными функциями осесимметричных мод являются смещения шнура как целого в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Условие устойчивости плазмы по отношению к жестким смещениям можно получить, рассмотрев силу, возникающую при смещении плазмы во внешнем удерживающем поле  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Для смещений по вертикали имеем

$$F_z = -\frac{2\pi R}{c} \int j_s \left( \frac{\partial B_r, \text{ext}}{\partial z} \xi_z + \delta B_r \right) dS_s. \quad (4.100)$$

Первое слагаемое в скобках является силой взаимодействия с удерживающим полем, а второе — силой взаимодействия с полями токов отражения, возбуждаемых в элементах конструкции при смещении плазмы. В частности,  $\delta B_r$  может создаваться активной системой обратной связи. Выражение в скобках в (4.100) можно считать постоянным по сечению шнура, и, таким образом, критерий устойчивости можно записать в виде

$$\frac{\delta B_r}{\delta \xi_z} + \frac{\partial B_r, \text{ext}}{\partial z} > 0. \quad (4.101)$$

Поскольку  $\frac{\partial B_{r,ext}}{\partial z} = \frac{\partial B_{z,ext}}{\partial r}$ , второе слагаемое в (4.101) можно выразить через показатель спада, в результате

$$\frac{\delta B_r}{\delta \xi_z} + \frac{n}{R} |B_{z,ext}| > 0. \quad (4.102)$$

В отсутствие системы обратных связей и магнитных экранов (4.102) сводится к условию [72]

$$n > 0. \quad (4.103)$$

Показатель спада становится отрицательным для шнура с вытянутым вдоль оси симметрии сечением. Устойчивости равновесия такого шнура можно достичь только с помощью соответствующей активной или пассивной системы обратной связи, обеспечивающей достаточную вели-

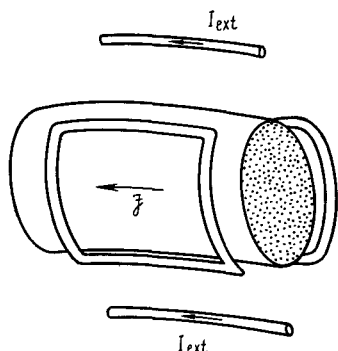


Рис. 20. Схема расположения пассивных контуров в виде вертикальных рамок для стабилизации неустойчивости по вертикали. При смещении плазменного шнура по вертикали токи в рамках создают горизонтальную составляющую магнитного поля, подавляющую неустойчивость. Квадрупольное поле, служащее для вытягивания сечения шнура, не искажается стабилизирующими контурами

чину  $\delta B_r / \delta \xi_z$ . В качестве пассивной системы могут служить замкнутые вертикальные рамки (рис. 20), не влияющие на проникновение квадрупольного поля в объем плазмы и сохраняющие поток горизонтального поля.

Условие устойчивости по отношению к горизонтальным смещениям можно получить, рассмотрев радиальную силу:

$$F_r = \frac{2\pi R}{c} \mathcal{Y} (B_z - B_{z,ext}). \quad (4.104)$$

Условие устойчивости сводится к

$$\partial F_r / \partial R < 0. \quad (4.105)$$

В пренебрежении величиной  $\left( \ln \frac{8R}{a} + \beta \mathcal{Y} + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right)^{-1}$  это условие записывается в виде

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{2\pi}{c} \mathcal{Y} |B_{z,ext}| \left( n - 1 + \frac{R}{\mathcal{Y}} \frac{\delta \mathcal{Y}}{\delta \xi_r} + \frac{R}{|B_{z,ext}|} \frac{\delta B_z}{\delta \xi_r} \right) < 0. \quad (4.106)$$

Изменение полного тока, связанное со смещением плазмы  $\delta \mathcal{Y} / \delta \xi_r$ , зависит от схемы возбуждения тока. Последнее слагаемое в (4.106) учитывает поперечные поля, связанные с магнитными экранами, желез-

ным сердечником, системой обратной связи. Как следует из (4.106), шнур может стать неустойчивым при неблагоприятной геометрии удерживающего поля (слишком большой показатель спада), а также в связи с наличием железного магнитопровода индуктора, что экспериментально наблюдалось на установке TFR [67].

#### § 4.5. Равновесие плазменного шнура с пространственной осью

Пусть ось плазменного шнура определяется уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$  ( $s$  — длина дуги). Основными параметрами кривой линии являются ее кривизна  $k(s)$  и кручение  $\kappa(s)$ . При решении физических задач более удобным является использование комплексной кривизны  $K(s)$ , определяемой выражением

$$K(s) = k(s) \exp \{ -[\kappa_0 s - \alpha(s)] \}, \quad \alpha(s) = \int_0^s \kappa(s) ds. \quad (4.107)$$

Параметр  $\kappa_0$ , фигурирующий в определении  $K(s)$ , выбирается из условия периодичности:

$$\kappa_0 = [\alpha(L) + l]/L, \quad (4.108)$$

где  $L$  — полная длина кривой;  $l$  — целое число. Вместо параметров  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  для описания любой кривой можно использовать комплексную кривизну  $K(s)$  и  $\kappa_0$ . По заданным  $K(s)$  и  $\kappa_0$  кривизна и кручение определяются по формулам

$$k(s) = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \quad \kappa(s) = \kappa_0 + (K_1' K_2 - K_2' K_1)/(K_1^2 + K_2^2), \quad (4.109)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — действительная и мнимая части  $K(s)$ :

$$K(s) = K_1(s) + iK_2(s). \quad (4.110)$$

Ввиду периодичности  $K(s)$  удобно использовать ее разложение в ряд Фурье:

$$K(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \exp \left[ i \frac{2\pi n}{L} s \right], \quad (4.111)$$

при этом мы переходим к новым инвариантам кривой — набору чисел  $\{\kappa_0, k_n\}$ .

Отметим, что представление кривых набором фурье-коэффициентов комплексной кривизны  $\{\kappa_0, k_n\}$  естественным образом выделяет простейшие замкнутые кривые как линии, характеризующиеся наименьшим числом параметров  $k_n$ . Так, окружность характеризуется одним отличным от нуля параметром  $k_0 = 1/R$ , винтовая линия — простейшая незамкнутая кривая — двумя  $\kappa_0, k_0$ . Простейшими замкнутыми пространственными кривыми естественно считать те, комплексная кривизна которых содержит минимальное число фурье-гармоник. Как показано в работе [73], условию замыкания можно удовлетворить уже в

случае, когда комплексная кривизна содержит только два слагаемых в Фурье-разложении:

$$K(s) = k_0 + k_N \exp \left[ iN \frac{2\pi}{L} s \right], \quad N = 2, 3... \quad (4.112)$$

Условия замыкания определяют вид зависимостей  $k_0 = k_0(\kappa_0)$ ,  $k_N = k_N(\kappa_0)$ . Для  $N = 2$  функции  $k_0(\kappa_0)$ ,  $k_2(\kappa_0)$  показаны на рис. 21. Кривые с  $N = 2$  представляют собой семейство пространственных вось-

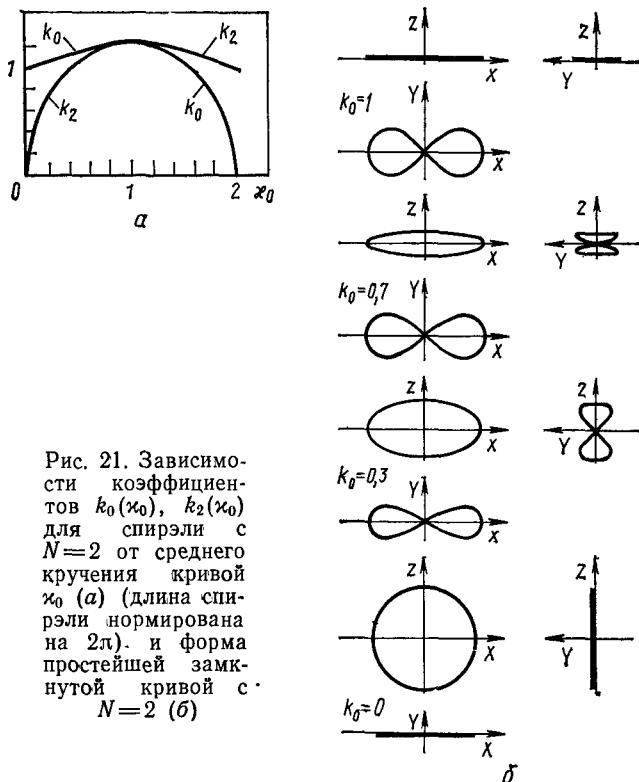


Рис. 21. Зависимости коэффициентов  $k_0(\kappa_0)$ ,  $k_2(\kappa_0)$  для спирали с  $N=2$  от среднего кручения кривой  $\kappa_0$  ( $a$ ) (длина спирали нормирована на  $2\pi$ ) и форма простейшей замкнутой кривой с  $N=2$  ( $b$ )

мерок с  $\kappa_0 = 0 \div 4\pi/L$ . Подробное описание кривых с  $K(s)$  вида (4.112), названных спиралями (спираль элементарная), содержится в работе [73].

Обозначим  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\beta$  — единичные векторы вдоль касательной, нормали и бинормали к оси. Они связаны соотношениями Серре—Френе

$$d\tau/ds = k\nu, \quad d\nu/ds = -k\tau + \kappa\beta, \quad d\beta/ds = -\kappa\nu. \quad (4.113)$$

Для описания равновесия удобной является местная ортогональная система координат  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $s$  [74], которую можно определить в окрестности пространственной кривой. Координаты  $\rho$ ,  $\omega$  в плоскости, перпендикулярной к оси в точке  $s$ , являются обычными полярными коор-

динатами, причем  $\rho$  равно расстоянию до кривой, а угол  $\omega - \alpha$  равен углу от главной нормали до направления на точку. Угол отсчета  $\omega$  сдвигается на величину  $\alpha$  для ортогонализации системы координат, при этом следует помнить, что в координатах  $\rho, \omega, s$  условия однозначности физических величин выглядят следующим образом:

$$f(\rho, \omega, s) = f(\rho, \omega + 2\pi m + n\alpha(L), s + nL), \quad (4.114)$$

где  $m, n$  — целые числа.

Единичные векторы  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\omega$  связаны с  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{v} \cos(\omega - \alpha) + \boldsymbol{\beta} \sin(\omega - \alpha); \\ \mathbf{e}_\omega &= \partial \mathbf{e}_\rho / \partial \omega = -\mathbf{v} \sin(\omega - \alpha) + \boldsymbol{\beta} \cos(\omega - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (4.115)$$

Решение уравнений равновесия для шнура с пространственной осью методом разложения по кривизне дано в работах [75, 76] и описано в обзоре [2]. Как и в токамаке с круглым сечением, удается получить выражение для смещения магнитных поверхностей и для полного магнитного поля при произвольном распределении тока и давления в плазменном шнуре.

Для гладких пространственных кривых, у которых отсутствуют разрывы в  $k(s)$  и  $\alpha(s)$ , магнитное поле за границей плазменного шнура характеризуется следующим скалярным потенциалом ( $B = \nabla \Phi$ ):

$$\begin{aligned} \Phi &= B_s s + \frac{2\mathcal{I}}{c} \omega + \frac{2\mathcal{I}}{c} \left[ k\rho \ln \frac{a}{\rho} + \frac{3}{2} k\rho - b_1 \frac{a}{\rho} + \frac{1}{2} k \frac{a^2}{\rho} \right] \times \\ &\times \sin(\omega - \alpha) + \frac{2\mathcal{I}}{c} \tilde{b}_1 \left( \frac{\rho}{a} + \frac{a}{\rho} \right) \cos(\omega - \alpha) - \\ &- \frac{1}{8} B_s (\rho^3 - 3a^2 \rho) \frac{\partial}{\partial s} k \cos(\omega - \alpha). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Здесь  $\mathcal{I}$  — полный ток в плазменном шнуре;  $a$  — малый радиус. Функции  $b_1(s)$  и  $\tilde{b}_1(s)$  зависят от распределения давления и тока в плазменном шнуре и определяются выражениями

$$b_1(s) - i \tilde{b}_1(s) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{\omega n} \exp[i(\alpha - \kappa_n s)], \quad \kappa_n = \kappa_0 - \frac{2\pi}{L} n; \quad (4.117)$$

$$b_{\omega n} = \frac{8\pi \langle \rho \rangle + \langle B_\omega^2 \rangle / 2 + \langle \kappa_n \rho B_\omega B_s \rangle - \frac{3}{4} \kappa_n B_s B_\omega(a)}{B_\omega(a) (B_\omega(a) - \kappa_n a B_s)} k_n a. \quad (4.118)$$

Скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по сечению шнура. Число членов ряда в (4.117) совпадает с числом фурье-коэффициентов комплексной кривизны  $K(s)$  и для простейших замкнутых кривых равно двум.

Полоидальное магнитное поле на поверхности плазменного шнура имеет вид

$$B_{\omega}(s, \omega) = \frac{2\mathcal{F}}{ca} [1 + b_1(s) \cos(\omega - \alpha) + \tilde{b}_1(s) \sin(\omega - \alpha) + ka \cos(\omega - \alpha)] - \\ - \frac{a^2}{4} B_s \frac{\partial}{\partial s} k(s) \sin(\omega - \alpha). \quad (4.119)$$

Пользуясь только локальной системой координат  $\rho, \omega, s$ , из полного поля равновесной конфигурации (4.116) нельзя выделить удерживающее поле, так как выражение (4.116) справедливо только в окрестности оси координат. Как и для осесимметричного шнура, необходимо определить вид функций, убывающих при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ , через которые выражается потенциал собственного поля плазмы. Аналогом функции  $\Psi^0$  (4.5) для шнура с пространственной осью является векторный потенциал нити с током, совпадающей по форме с осью плазменного шнура [77]. Он определяется интегралом Био—Савара

$$\mathbf{A} = \int \frac{\boldsymbol{\tau}' ds'}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'|}, \quad \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}(s'), \quad (4.120)$$

где  $\mathbf{r}_n$  — радиус-вектор точки наблюдения:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}(s) + \rho \mathbf{e}_\rho; \quad (4.121)$$

$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(s')$  — радиус-вектор элемента дуги. Обозначим  $\mathbf{r}$  — вектор, соединяющий точки  $s$  и  $s'$  на кривой:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(s') - \mathbf{r}(s). \quad (4.122)$$

Очевидны следующие необходимые для дальнейшего соотношения:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds'} = \boldsymbol{\tau}', \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{(\mathbf{r}\boldsymbol{\tau})}{r}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds'} = \frac{(\mathbf{r}\boldsymbol{\tau}')}{r}, \quad (4.123)$$

Формулу (4.120) можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{F}}{c} \oint \frac{\boldsymbol{\tau}' ds'}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho(\mathbf{r}\mathbf{e}_\rho)}} \quad (4.124)$$

и, с точностью до членов первого порядка по кривизне,

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{F}}{c} \oint \frac{\boldsymbol{\tau}' ds'}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} \left( 1 + \rho \frac{(\mathbf{r}\mathbf{e}_\rho)}{r^2 + \rho^2} \right). \quad (4.125)$$

Рассмотрим основное слагаемое в продольной составляющей векторного потенциала:

$$A_s = \frac{\mathcal{F}}{c} \oint \frac{(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}') ds'}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}. \quad (4.126)$$



Легко видеть, что при  $\rho \rightarrow 0$  это выражение имеет логарифмическую особенность. Ее можно выделить в явном виде, заметив, что

$$\int_s^{s_1} \frac{(\tau\tau')}{r\sqrt{r^2+\rho^2}} ds = \ln \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + \rho^2}}{\rho},$$

$$r_1 = |\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s)|. \quad (4.127)$$

Разбив интеграл (4.126) на две части и добавив с соответствующим знаком (4.127), получим

$$\oint \frac{(\tau\tau') ds'}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} = \int_s^{s_1} \left[ \frac{(\tau\tau')}{r} - \frac{(\tau\tau')}{r^2} \right] ds' +$$

$$+ \int_{s_1}^s \left[ \frac{\tau\tau'}{r} + \frac{(\tau\tau')}{r^2} \right] ds' + 2 \ln \frac{2r_1}{\rho}. \quad (4.128)$$

Здесь мы опустили слагаемое, дающее вклад  $O(k^2\rho^2)$ . Интегралы в (4.128) зависят только от длины дуги, и поэтому в основном приближении  $A_s$  можно представить в виде

$$A_s = \frac{2\mathcal{F}}{c} \left[ \ln \frac{8R}{\rho} - 2 + A_{s0}(s) \right], \quad R \equiv L/2\pi, \quad (4.129)$$

где

$$A_{s0}(s) = \frac{1}{2} \int_s^{s_1} \left[ \frac{(\tau\tau')}{r} - \frac{(\tau\tau')}{r^2} \right] ds' +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{s_1}^s \left[ \frac{(\tau\tau')}{r} + \frac{(\tau\tau')}{r^2} \right] ds' + \ln \frac{r_1}{4R} + 2. \quad (4.130)$$

Для осесимметричного кольца  $A_{s0} = 0$ .

На основе (4.129) можно найти индуктивность тонкого шнура с пространственной осью:

$$L = \frac{c}{\mathcal{F}^2} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV = 4\pi R \left[ \ln \frac{8R}{a} - 2 \right] + 2 \oint A_{s0}(s) ds. \quad (4.131)$$

Выражение для скалярного потенциала нити с током можно найти из соотношения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi^0}{\partial \omega} = B_\omega = \frac{\partial A_\rho}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial \rho} + k \cos(\omega - \alpha) A_s =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mathcal{F}}{c} \oint \frac{\tau\tau'}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} ds' + \frac{\mathcal{F}}{c} \oint \frac{\mathbf{e}_\omega \mathbf{r} \tau'}{(r^2 + \rho^2)^{3/2}} ds' +$$

$$+ 3\rho^2 \frac{\mathcal{F}}{c} \oint \frac{(\tau\tau') (\mathbf{r} \mathbf{e}_\rho)}{(r^2 + \rho^2)^{5/2}} ds'. \quad (4.132)$$

Первое слагаемое в правой части согласно (4.129) равно  $1/\rho$ . Отсюда, интегрируя по  $\omega$ , получаем

$$\varphi^0 = \frac{2\mathcal{F}}{c} \omega + \frac{\mathcal{F}}{c} \rho \oint \frac{e_\rho r \tau'}{(r^2 + \rho^2)^{3/2}} ds' - 3 \frac{\mathcal{F}}{c} \rho \oint \frac{(\tau \tau') (\tau e_\omega) \rho^2}{(r^2 + \rho^2)^{5/2}} ds' + \varphi_1(s). \quad (3.133)$$

При малых  $\rho$  подынтегральная функция в последнем интеграле имеет  $\delta$ -образную зависимость от  $(s - s')$  и это слагаемое равно  $\frac{\mathcal{F}}{c} k \rho \sin(\omega - \alpha)$ . Выделяя особенность во втором интеграле при  $s = s'$ , можно получить следующее выражение для скалярного магнитного потенциала нити:

$$\varphi^0 = \frac{\mathcal{F}}{c} \left[ 2\omega + \left( k \rho \ln \frac{8R}{\rho} + \rho f_1 \right) \sin(\omega - \alpha) + \rho \tilde{f}_1 \cos(\omega - \alpha) \right] + \frac{\mathcal{F}}{c} \int_s^s \hat{f}_1(s') ds', \quad (4.134)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1(s) &= \int_s^{s_1} \left( \frac{\beta r \tau'}{r^3} - \frac{1}{2} k \frac{r \tau'}{r^2} \right) ds' + \int_{s_1}^s \left( \frac{\beta r \tau'}{r^3} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} k \frac{r \tau'}{r^2} \right) ds' + k \ln \frac{r_1}{4R}, \\ \tilde{f}_1(s) &= \oint \frac{\nu r \tau'}{r^3} ds', \quad \hat{f}_1(s) = \oint \frac{\tau r \tau'}{r^3} ds'. \end{aligned} \right\} \quad (4.135)$$

Функции  $f_1(s)$ ,  $\tilde{f}_1(s)$ ,  $\hat{f}_1(s)$  для осесимметричного кольца обращаются в нуль. Последнее слагаемое в (4.134) определяет продольное поле от нити с током.

Зная вид скалярного потенциала нити с током, можно из равновесного поля (4.116) выделить удерживающее. Для этого достаточно из (4.116) вычесть (4.134) и опустить сингулярное при  $\rho \rightarrow 0$  слагаемое. В результате для потенциала  $\varphi_{\text{ext}}$  удерживающего поля имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ext}} &= B_s s - \frac{1}{8} B_s (\rho^3 - 3a^2 \rho) \frac{\partial}{\partial s} k \cos(\omega - \alpha) + \\ &+ \frac{\mathcal{F}}{c} \left( -k \rho \ln \frac{8R}{a} + \frac{3}{2} k \rho + b_1 \frac{\rho}{a} - \rho f_1 \right) \sin(\omega - \alpha) - \\ &- \frac{\mathcal{F}}{c} \left( \tilde{b}_1 \frac{\rho}{a} + \rho \tilde{f}_1 \right) \cos(\omega - \alpha). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Слагаемое, пропорциональное току плазмы, представляет потенциал двух взаимно перпендикулярных однородных в плоскости  $s = \text{const}$  полей. Одно из них направлено по бинормали и равно:

$$B_{\beta, \text{ext}} = -\frac{\mathcal{F}}{ca} \left( ka \ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} ka - b_1 + a f_1 \right), \quad (4.137)$$

а второе — вдоль нормали:

$$B_{v, \text{ext}} = -\frac{\mathcal{F}}{ca} (\tilde{b}_1 + a\tilde{f}_1). \quad (4.138)$$

Зная требуемое для равновесия удерживающее поле, можно найти положение магнитной оси вакуумного поля и, тем самым, смещение шнура относительно этой оси.

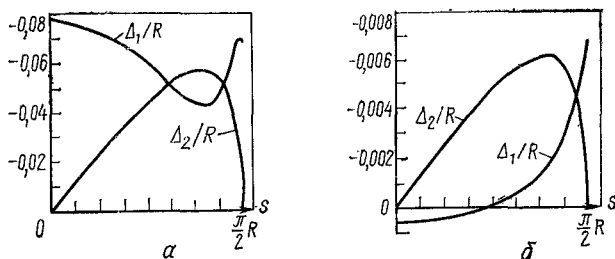


Рис. 22. Смещения плазменного шнура с пространственной осью в виде спирали с  $N=2$ ,  $\kappa_0=0,3$  и однородной плотностью тока;  $\beta=1\%$ ,  $a/R=0,1$ ,  $aB_s/RB_\theta=1$ ;

$\Delta_1$  — смещение вдоль нормали к кривой,  $\Delta_2$  — смещение вдоль бинормали:

$a$  — смещение в вакуумном магнитном поле относительно магнитной оси;  $b$  — смещение шнура, помещенного в идеально проводящий кожух ( $b/a=1,5$ ) относительно оси кожуха

На рис. 22 показаны расчеты смещения плазменного шнура, имеющего форму простейшей пространственной кривой с  $N=2$ , при наличии проводящего кожуха и при его отсутствии. Во втором случае смещение шнура с током относительно вакуумной магнитной оси на порядок превышает смещение в кожухе.

#### § 4.6. Зондовые измерения в токамаке

Рассмотрим основные следствия теории равновесия, которые можно использовать для получения информации о параметрах плазмы с помощью магнитных измерений.

В сильном продольном магнитном поле,  $B_{se} \gg B_s - B_s$ , параметр  $\mu_{\mathcal{F}}$  (2.8), входящий в соотношение равновесия по малому радиусу (2.9), (2.102), можно выразить через измеряемые величины

$$\mu_{\mathcal{F}} = \frac{c^2}{4\pi\mathcal{F}^2} \int [B_{se}^2 - B_s^2] dS = \frac{c^2}{2\pi\mathcal{F}^2} B_{se} \delta\Phi, \quad (4.139)$$

где введено обозначение  $\delta\Phi$  для потока, вытесненного из плазмы:

$$\delta\Phi = \int (B_{se} - B_s) dS. \quad (4.140)$$

Эту величину иногда называют просто диамагнитным сигналом.

Рассмотрим две концентрические круглые петли с радиусами  $b_1$  и  $b_2$ , охватывающие плазменный шнур (рис. 23). С их помощью можно

измерить поток продольного магнитного поля, пронизывающий сечения  $\rho < b_1$  и  $\rho < b_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(b_1) &= B_{s0} 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - b_1^2}) + \delta\Phi; \\ \Phi(b_2) &= B_{s0} 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - b_2^2}) + \delta\Phi, \end{aligned} \right\} \quad (4.141)$$

где  $R$  — расстояние от центра петель до главной оси тора,  $B_{s0} = B_{se}(R)$ . Отсюда получаем выражение для диамагнитного сигнала

$$\delta\Phi = \Phi(b_1) - [\Phi(b_2) - \Phi(b_1)] \frac{b_1^2}{b_2^2 - b_1^2} \frac{\sqrt{R^2 - b_1^2} + \sqrt{R^2 - b_2^2}}{R + \sqrt{R^2 + b_1^2}}. \quad (4.142)$$

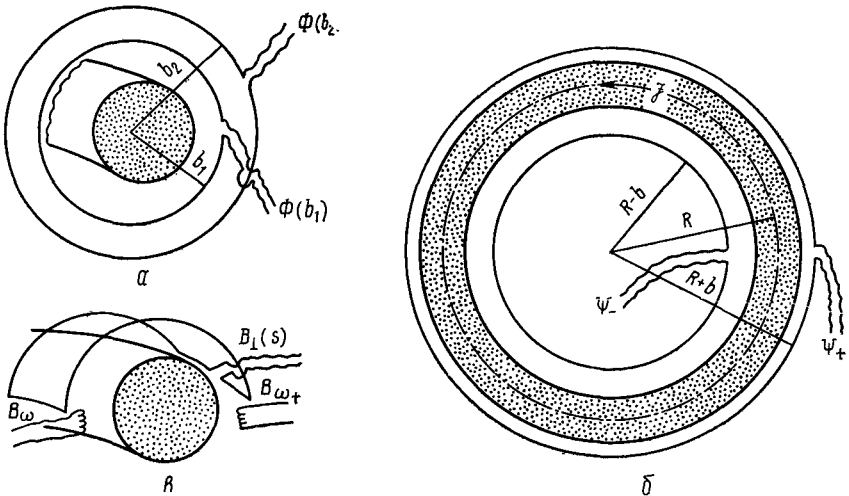


Рис. 23. Схема магнитных измерений для шнура круглого сечения:

$a$  — петли, охватывающие плазменный шнур в сечении  $\zeta = \text{const}$ , для измерения диамагнитного сигнала;  $b$  — продольные петли, служащие для измерения функции потока  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$  и среднего поля  $\bar{B}_\perp$ ;  $\theta$  — локальные зонды для измерения  $B_{\omega+}$ ,  $B_{\omega-}$  и локальная петля для измерения  $B_\perp(s)$

Пользуясь интегральным условием равновесия в поперечном сечении (2.9), (2.102,) по измеренным  $\delta\Phi$  и току  $\mathcal{I}$  можно определить величину  $\beta_{\mathcal{I}}$  [для плазмы с анизотропным давлением —  $\beta_{\mathcal{I}\perp}$ , см. (4.97)].

На основе формул (4.36)—(4.38), определяющих функцию потока и магнитные поля равновесной плазменной конфигурации, с непосредственно измеряемыми величинами можно связать величину смещения  $\Delta$  плазменного шнура и параметр  $\beta_{\mathcal{I}} + l_i/2$ . С помощью продольной петли,  $\rho = b$ ,  $\omega = \text{const}$ , расположенной вне шнура (см. рис. 23), можно измерять значение функции потока  $\Psi(b, \omega)$ , а с помощью локальных зондов — магнитное поле  $B_\omega$ . Обозначим  $\Psi_+$ ,  $B_{\omega+}$ ,  $\Psi_-$ ,  $B_{\omega-}$  — значения функции потока и тангенциальной компоненты маг-

нитного поля соответственно на внешней ( $\omega = \pi$ ) и внутренней ( $\omega = 0$ ) сторонах тора с радиусами  $R$  и  $b$ . Тогда из (4.36)—(4.38) получаем

$$\frac{2\mathcal{F}}{cR} \left( \ln \frac{b}{a} + \beta\mathcal{F} + \frac{l_i}{2} - 1 \right) = \frac{B_{\omega+} - B_{\omega-}}{2} + B_{\perp}; \quad (4.143)$$

$$\frac{\Delta}{b} = \frac{b}{2R} \left[ \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right] + \\ + \frac{cb}{4\mathcal{F}} \left[ \frac{B_{\omega+} - B_{\omega-}}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) - B_{\perp} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \right], \quad (4.144)$$

где

$$B_{\perp} \equiv (\Psi_- - \Psi_+)/4\pi Rb. \quad (4.145)$$

Формулы (4.143), (4.144) можно обобщить на случай, когда удерживающее поле в токамаке имеет модуляцию по длине  $s$ . Источниками модуляции могут быть ярмо магнитопровода, разрезы в кожухе и т. п. При этом плазменный шнур будет испытывать отклонение от экваториальной плоскости:

$$\delta z/R \approx \delta B_{z, \text{ext}}/B_s, \quad (4.146)$$

где  $\delta B_{z, \text{ext}}$  — отклонение удерживающего поля от своего среднего значения. Если считать возмущения симметрии плавными,  $\rho \partial/\partial s \ll 1$ , то в формулах (4.143), (4.144) следует сделать замену [78]

$$\frac{B_{\omega+} - B_{\omega-}}{2} \rightarrow \frac{B_{\omega+} - B_{\omega-}}{2} + \bar{B}_{\perp} - B_{\perp}(s). \quad (4.147)$$

Здесь  $\bar{B}_{\perp} = (\Psi_- - \Psi_+)/4\pi Rb$  — среднее значение поперечного поля, пронизывающего площадь между двумя тороидальными петлями: ( $\omega = 0$ ) и ( $\omega = \pi$ ),  $B_{\perp}(s)$  — локальное значение поперечного поля, которое может быть измерено локальной петлей, расположенной над зондами, измеряющими поле  $B_{\omega}$ .

В сочетании с диамагнитными измерениями формула (4.143) дает возможность определить внутреннюю индуктивность  $l_i$ , характеризующую распределение плотности тока и магнитную энергию полоидального поля в плазменном шнуре. Последняя необходима для расчета мощности омического нагрева, входящего в формулу для определения энергетического времени жизни плазмы. В случае заметной анизотропии плазмы,  $\rho_{\parallel} \neq \rho_{\perp}$ , в формулы (4.143), (4.144) вместо  $\beta\mathcal{F}$  входит величина  $(\beta\mathcal{F}_{\parallel} + \beta\mathcal{F}_{\perp})/2$  и уравнений для определения  $l_i$  не хватает.

В случае осесимметричного плазменного шнура некруглого сечения информацию о распределении параметров внутри плазмы можно получить, пользуясь интегральными соотношениями (см. § 2.6). Так, формула (2.90) позволяет по измерениям магнитного поля вне плазмы определить как связь параметра  $\beta\mathcal{F}$  с диамагнитным сигналом (2.102),

так и моменты величины  $P = p + (B_s^2 - B_{se}^2)/8\pi$ :  $\int P x dV$ ,  $\int P (x^2 - z^2) dV$  и т. д., а интегральные соотношения (2.115) позволяют измерять моменты плотности тока:  $\int j_s x dS$ ,  $\int j_s (x^2 - z^2) dS$  и т. д. Следует отметить, что наряду с измерениями тангенциальной компоненты магнитного поля здесь необходимы также измерения и нормальной

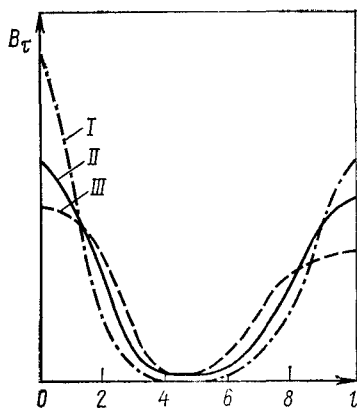


Рис. 24. Распределение поперечной компоненты магнитного поля  $B_\tau(l)$  вдоль поверхности кожуха для геометрии перстенькового токамака Т-9 [28]. Точка  $l=0$  соответствует внутренней стороне тора,  $l=10$  — внешней стороне. Кривые соответствуют различным эффективным вытянутостям  $l_z/l_r$  токового канала:

I —  $l_z/l_r = 1$  — сильно пикрированное распределение тока; II —  $l_z/l_r = 2$  — приблизительно однородное распределение тока; III —  $l_z/l_r = 3$  — распределение тока с выраженной немонотонностью (модель скиннированного тока)

токового канала. Это дает возможность слежения за положением и формой плазменного шнура и контроля равновесия системой обратной связи.

## ГЛАВА 5

### ОБ ЭВОЛЮЦИИ РАВНОВЕСИЯ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

При изменении параметров равновесной системы (давления плазмы, распределения продольного тока, внешнего магнитного поля) происходит изменение формы сечения магнитных поверхностей, в результате чего может нарушиться термоизоляция плазмы. Прогнозирование такого изменения и осуществление контроля за формой плазмы требуют численного моделирования процесса эволюции.

Развитые в настоящее время численные методы решения задач равновесия дают возможность непосредственно сравнить измеряемые с помощью локальных зондов магнитные поля вне плазмы и измеряемую с помощью продольных петель функцию потока  $\Psi(r, z)$  с модельными расчетами (см., [28]). Для шнура некруглого сечения наблюдается явно выраженная зависимость распределения полоидального поля на магнитных поверхностях вне плазмы от распределения плотности тока, проявляющаяся, в частности, в резком ослаблении напряженности полоидального магнитного поля в вершинах вытянутого сечения. Это позволяет различать скинированное, однородное и колоколообразное распределения тока в шнуре, даже не пользуясь диамагнитными измерениями (рис. 24).

В заключение отметим, что измерение на замкнутом контуре распределения функции потока  $\Psi(l)$  и тангенциальной компоненты магнитного поля

$$B_\tau(l) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

определяет геометрию вакуумных магнитных поверхностей и, в частности, форму границы

Для решения задачи об эволюции равновесия необходимо знать, как меняются входящие в правую часть уравнения равновесия (2.21) газокинетическое давление плазмы  $p(a, t)$ , полоидальный ток  $F(a, t)$  или какая-либо другая характеристика магнитных поверхностей, например продольный ток  $\mathcal{I}(a, t)$ , поток  $\Psi(a, t)$ , параметр  $q(a, t) = -d\Phi/d\Psi$ .

В данной главе описана общая постановка задач моделирования эволюции равновесия замкнутых магнитогидродинамических конфигураций.

### § 5.1. Одномеризация уравнений переноса

Давление плазмы  $p(a, t)$  определяется распределением плотности и температуры составляющих плазму компонент (электронов и разных сортов ионов):

$$p = \sum nT. \quad (5.1)$$

Для каждого из них нужно написать уравнения непрерывности и теплопроводности, при этом учитывают, что выравнивание плотности и температуры вдоль магнитной поверхности происходит быстрее, чем их изменение вследствие усредненного переноса в радиальном направлении. Поэтому для расчета можно пользоваться одномерными (усредненными по магнитной поверхности) уравнениями переноса, считая в них  $n$  и  $T$  функциями  $a, t$ .

Для правильного написания таких уравнений необходимо учесть, что магнитные поверхности  $a(\mathbf{r}, t) = \text{const}$  сами движутся в пространстве со скоростью

$$\mathbf{v}_a = d\mathbf{r}/dt, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{r}$  определяется из уравнения  $a(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ . Так как для магнитной поверхности, маркируемой переменной  $a$ , по определению,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla a = 0, \quad (5.3)$$

то скорость точек поверхности  $\mathbf{v}_a$  связана с изменением  $a$  в фиксированной точке пространства соотношением

$$\frac{\partial a}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}} = -v_a^1, \quad (5.4)$$

где  $v_a^1 = \mathbf{v}_a \nabla a$  — контравариантная компонента вектора скорости  $\mathbf{v}_a$ .

Отметим, что значение скорости  $v_a^1$  существенно зависит от выбора метки магнитных поверхностей  $a(\mathbf{r}, t)$ , в качестве которой может выступать любая поверхностная функция, например  $V, p, \Psi, \Phi$  и т. п. В диссипативной плазме скорость  $v_{\Psi}^1 = -\frac{\partial \Psi}{\Psi \partial t} \Big|_{\mathbf{r}}$  движения поверхностей полоидального потока  $\Psi = \text{const}$  отличается от скорости  $v_{\Phi}^1$  движения поверхностей продольного потока  $\Phi = \text{const}$  или от скорости  $v_n^1$  изохор  $n = \text{const}$ . Системы этих поверхностей как бы непре-

равно проходят одна через другую, что соответствует различной зависимости функций  $p(a, t)$ ,  $\Phi(a, t)$ ,  $\Psi(a, t)$  от времени.

Уравнения переноса, записанные в переменных  $a, t$ , будут содержать кроме скорости частиц  $v$  также и скорость  $v_a$  движения магнитной поверхности. Чтобы получить такие уравнения, заметим, что производная по времени  $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r$  с учетом движения поверхности  $a(r, t)$  должна быть равна:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_r = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_a + \frac{\partial a}{\partial t} \Big|_r \frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial t} - v_a^1 \frac{\partial}{\partial a}. \quad (5.5)$$

Обозначим  $\langle \rangle_V$  — усреднение по объему слоя между магнитными поверхностями  $a = \text{const}$ ,  $a + da = \text{const}$ :

$$\langle f \rangle_V = \frac{d}{dV} \int f \sqrt{g} d\theta d\xi = \langle f \sqrt{g} \rangle / \langle \sqrt{g} \rangle. \quad (5.6)$$

(Напомним, что угловые скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по  $\theta, \xi$ .) Усредненная по объему слоя производная  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_r$  от поверхностных функций определится оператором

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_a + \left\langle 4\pi^2 \sqrt{g} \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial V}, \quad (5.7)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial V} = \frac{1}{4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle} \frac{\partial}{\partial a}. \quad (5.8)$$

Усредненное выражение для  $\text{div } \mathbf{A}$  с учетом формулы (П.32) имеет вид

$$\langle \text{div } \mathbf{A} \rangle_V = \frac{\partial}{\partial V} \langle 4\pi^2 \sqrt{g} A^1 \rangle. \quad (5.9)$$

Обозначим  $v, q$  — усредненные с весом  $\sqrt{g}$  по угловым переменным  $\theta, \xi$  контравариантные компоненты векторов скорости части и потока тепла:

$$v \equiv \langle \sqrt{g} v \nabla a \rangle, \quad q = \langle \sqrt{g} q \nabla a \rangle, \quad (5.10)$$

тогда с учетом формул (5.7), (5.8), (5.10) уравнения переноса можно представить в виде

$$\frac{Dn}{Dt} + \frac{\partial}{\partial V} (nv) = \Gamma; \quad (5.11)$$

$$\frac{3}{2} n \left( \frac{DT}{Dt} + v \frac{\partial T}{\partial V} \right) + nT \frac{\partial v}{\partial V} + \frac{\partial q}{\partial V} = Q. \quad (5.12)$$

Здесь  $\Gamma, Q$  — усредненные по объему магнитного слоя плотности источников частиц и тепла для данного сорта зарядов.



Уравнения (5.11), (5.12) представляют собой два первых четных момента (умножение на  $v^0 = 1$  и  $|v|^2$  с последующим интегрированием по скоростям) кинетического уравнения для функции распределения соответствующих частиц, выражающих законы сохранения частиц и энергии. Первые два нечетных момента ( $\mathbf{v}$  и  $|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}$ ) [закон сохранения импульса и потока энергии] можно использовать для нахождения входящих в (5.11), (5.12) гидродинамической скорости и теплового потока. Определение этих выражений с учетом конкретной геометрии системы представляет задачу неоклассической теории переносов (для устойчивой плазмы) и теории турбулентности (в случае микроскопической неустойчивой плазмы). Как показывают многолетние экспериментальные исследования по управляемому термоядерному синтезу, переносы частиц и тепла в высокотемпературной плазме, удерживаемой в магнитном поле, как правило, аномальные. Таким образом, у нас нет, по существу, точных и надежных уравнений переноса для расчета плотности, температуры и давления плазмы. При численном моделировании распределений плотности и температуры компонент плазмы обычно используются полуэмпирические выражения для потоков частиц и тепла. Одномерная форма уравнений (5.11) и (5.12) облегчает применение таких полуэмпирических зависимостей даже в сугубо двумерной ситуации (эллиптическое,  $D$ -образное и другие сечения плазменного шнура).

Вопрос о переносе частиц возникает и при рассмотрении диффузии магнитных потоков, к которому мы сейчас и перейдем.

## § 5.2. Уравнение эволюции магнитных потоков

Входящая в правую часть уравнения равновесия (2.21) наряду с  $r'$  ( $\Psi$ ) функция  $F$  ( $\Psi$ ) может быть выражена через производные продольного магнитного потока. Действительно, продольный поток между двумя магнитными поверхностями, ограничивающими объем  $dV$ , равен:

$$d\Phi = \frac{4\pi}{c} \int \frac{F}{2\pi r} dS = \frac{4\pi}{c} dV \left\langle \frac{1}{4\pi^2 r^2} \right\rangle_V, \quad (5.13)$$

так что [см. также (2.63)]

$$\frac{4\pi}{c} F = \left\langle \frac{1}{4\pi^2 r^2} \right\rangle_V^{-1} \frac{d\Phi}{dV} = \frac{1}{\langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle} \frac{d\Phi}{da}, \quad (5.14)$$

Используя определение запаса устойчивости

$$q = -d\Phi/d\Psi = -\Phi'/\Psi', \quad (5.15)$$

можно выразить  $F$  через  $q$ :

$$\frac{4\pi}{c} F = - \frac{q}{\langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle} \frac{d\Psi}{da}, \quad (5.16)$$

Выражение  $F$  через  $q$  удобно тем, что при быстрых изменениях параметров системы, когда можно пренебречь диссипативными процес-

сами, зависимость  $q(\Psi)$  не меняется во времени,  $\partial q(\Psi, t)/\partial t = 0$ , и определяется начальным условием,  $q(a, t) = q_0(a)$ . Это условие есть следствие «вмороженности» магнитных потоков в бездиссипативной плазме.

При заданном  $q(a)$  задача об эволюции сводится к нахождению равновесного решения с заданными на каждый момент времени давлением  $p(a, t)$  и внешними условиями.

С учетом диссипации к уравнению равновесия следует добавить наряду с уравнениями переноса для  $n$  и  $T$  также уравнение диффузии магнитных потоков, которое можно представить в форме диффузионного уравнения для  $\mu = 1/q$ . Это уравнение вместе с уравнениями для определения скоростей радиального переноса частиц плазмы и течения плазмы вдоль магнитных поверхностей получается из уравнений переноса импульса различных компонент плазмы (первый по  $v$  момент кинетического уравнения). В гл. 1 показано, как эти уравнения получаются в дрейфовом приближении из закона движения частиц в сильном магнитном поле. В пренебрежении инерцией их можно записать в виде следующего векторного уравнения для каждой из компонент плазмы:

$$-\nabla p_{\parallel} + \frac{en}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{\lambda}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] + \frac{B^2}{4\pi} \nabla \lambda - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla\lambda)}{4\pi} + \lambda \nabla \frac{B^2}{8\pi} + n(e\mathbf{E} - \mathbf{R}) = 0. \quad (5.17)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{4\pi(p_{\parallel} - p_{\perp})}{B^2},$$

$n, e, p_{\parallel}, p_{\perp}, R$  — характеристики данного сорта частиц плазмы. Умножим (5.17) скалярно на  $B/ne$  и усредним по магнитному слою:

$$\langle \mathbf{E}\mathbf{B} \rangle_v = \frac{1}{e} \langle \mathbf{R}\mathbf{B} \rangle_v + \frac{1}{e} \left\langle \frac{\mathbf{B}\nabla p_{\parallel}}{n} \right\rangle_v - \left\langle \frac{\lambda}{ne} \mathbf{B}\nabla \frac{B^2}{8\pi} \right\rangle_v. \quad (5.18)$$

Ковариантные компоненты вектора  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} - \nabla\varphi^E$ , в соответствии с выражением (2.53) для компонент векторного потенциала через полоидальный и тороидальный магнитные потоки, определяются формулами

$$E_2 = -\frac{\partial\Phi}{c\partial t} - \frac{\partial\varphi^E}{\partial\theta}, \quad E_3 = -\frac{\partial\Psi}{c\partial t} - \frac{\partial\varphi^E}{\partial\zeta}. \quad (5.19)$$

Контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{B}$  даются выражением (2.51). В результате усреднения получаем

$$\langle \mathbf{E}\mathbf{B} \rangle_v = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \frac{\partial\Psi}{\partial a} - \frac{\partial\Psi}{\partial t} \frac{\partial\Phi}{\partial a} \right). \quad (5.20)$$

В области частых столкновений (длина свободного пробега заряженных частиц не превышает радиуса плазмы) правая часть уравнения (5.18) сводится к

$$\frac{1}{c} \langle \mathbf{RB} \rangle = \frac{1}{\sigma_{\parallel}} \langle \mathbf{jB} \rangle = \frac{4\pi}{c\sigma_{\parallel}} (F\mathcal{Y}' - \mathcal{Y}F'), \quad (5.21)$$

где  $\sigma_{\parallel}(a, t)$  — эффективная электропроводность плазмы, штрихом обозначена производная по  $a$ .

В области редких столкновений в правой части (5.18) начинают играть роль дополнительные слагаемые. Общее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Psi' - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Phi' = \frac{4\pi}{\sigma_{\text{eff}}} F [F (\mathcal{Y}/F)' - \mathcal{Y}'_B], \quad (5.22)$$

где  $\mathcal{Y}_B$  — так называемый бутстрэп-ток, индуцируемый диффузией в полоидальном магнитном поле «банановых» орбит запертых заряженных частиц. Уравнение (5.22) удобно записать для числа вращения  $\mu = 1/q = -\Psi'/\Phi'$ . Поделив (5.22) на  $\Phi'$  и продифференцировав по  $a$ , получим

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\dot{\Phi}}{\Phi'} \frac{\partial \mu}{\partial a} = \frac{4\pi}{\Phi'} \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{F}{\sigma_{\text{eff}} \Phi'} [F (\mathcal{Y}/F)' - \mathcal{Y}'_B] \right\}, \quad (5.23)$$

где  $\Phi = \partial \mathcal{D}(a, t)/\partial t$ .

При осевой симметрии согласно (2.57) и (2.58)

$$\mathcal{Y} = \frac{c}{4\pi} \left\langle \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \right\rangle \Phi' \mu, \quad F = \frac{c}{4\pi} \Phi' \langle \sqrt{g}/g_{33} \rangle. \quad (5.24)$$

Отсюда видно, что уравнение (5.22) и эквивалентное ему (5.24) — уравнения диффузионного типа. Напомним, что в этих уравнениях  $a$  продольная поверхностная функция и производная по времени берется при постоянном  $a$ . Если за  $a$  взять продольный поток, то  $\Phi = 0$ ,  $\Phi' = 1$ . Как видно, левые части уравнений (5.22), (5.24) представляют собой изменение  $\Psi$  или  $\mu$  относительно продольного магнитного потока. В отсутствие диссипативных эффектов,  $\sigma_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ , эти уравнения выражают условие взаимной вмороженности потоков. Может показаться странным, что в уравнении диффузии полоидального потока отсутствует слагаемое, соответствующее конвективному переносу потока вместе с диффундирующей плазмой. В действительности в скрытом виде оно содержится в правой части написанных уравнений. В этом можно убедиться, рассмотрев структуру  $\zeta$ -й ковариантной компоненты уравнения (5.17). При осевой симметрии,  $\partial/\partial \zeta = 0$ , она имеет вид

$$n(eE_3 - R_3) + \frac{en}{c} \sqrt{g} v^1 B^2 - \frac{B_3}{4\pi} (B \nabla \lambda) = 0. \quad (5.25)$$

Согласно (2.54)  $B_3 = B_3(a)$ , и уравнение (5.25) при усреднении его по магнитному слою дает

$$\langle n(eE_3 - R_3) \rangle_V - \frac{e}{c} \langle nv^1 \rangle_V \Psi' / 2\pi = 0, \quad (5.26)$$

или, с учетом выражения (5.19) для  $E_3$ ,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v \frac{\partial \Psi}{\partial a} = \frac{1}{e} \langle nR_3 \rangle_V. \quad (5.27)$$

Средняя скорость переноса плазмы  $v = \langle nv^1 \rangle / \langle n \rangle_V$ , которая входит в уравнение (5.27) и которая необходима также для решения уравнений переноса частиц и энергии (5.11), (5.12), может быть выражена формально из  $\theta$ -й компоненты уравнения (5.17). Она включает в себя и скорость сжатия тороидального потока  $-\dot{\Phi}/\Phi'$ , и диффузию. Ясно, что уравнение (5.22) можно рассматривать как результат подстановки в (5.27) этого выражения для скорости переноса.

Заметим здесь, что поскольку диффузия вызывается не только силой взаимного трения различных компонент плазмы, но и вязкостью [слагаемые с  $\lambda$  в уравнении (5.17)], то локальные скорости ионов и электронов водородоподобной плазмы могут в принципе различаться. Из (5.26) видно, однако, что при осевой симметрии диффузия амбиполярна,  $\sum e \langle nv^1 \rangle = 0$ , поскольку  $\sum n(eE_3 - R_3) = 0$ . Это снимает вопрос о том, скорость какой компоненты плазмы входит в уравнение (5.27).

Отметим также, что, как видно из уравнения (5.17), неоклассические эффекты дополнительного переноса частиц поперек магнитных поверхностей, характеризующиеся слагаемым с  $\lambda$ , связаны с несимметрией верха—низа равновесной плазмы. Созданием искусственной анизотропии тензора напряжений, асимметричной относительно экваториальной плоскости тора, можно в принципе влиять на направление эффективной диффузии.

Действительные выражения для скорости переноса плазмы и соответственно для тока  $\mathcal{J}_V$  могут отличаться от даваемых неоклассической теорией переноса [4]. Как уже отмечалось, в настоящее время нет установившегося взгляда на то, чем определяются реальные переносы. Поэтому мы не привели конкретных выражений для потоков частиц и тепла, а рассмотрели лишь общую структуру уравнений, описывающих эволюцию равновесия, для выяснения того, как и какие уравнения следует использовать в двумерной непрерывно меняющейся конфигурации плазмы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

При описании трехмерных магнитогидродинамических равновесий целесообразно использовать адекватную систему координат  $a, \theta, \zeta$ , координатные поверхности которой  $a = \text{const}$  совпадают с магнитными, циклические же координаты  $\theta$  — по малому и  $\zeta$  — по большому обходу тора выбраны некоторым специальным образом. Координаты  $a, \theta, \zeta$  — не ортогональные. Такие координаты удобно использовать и при описании двумерных конфигураций. Не предполагая достаточного знакомства читателей с криволинейными координатами, приведем наиболее существенные для теории равновесных магнитогидродинамических конфигураций сведения о них.

**а) Базис.** Криволинейные координаты  $a \equiv x^1, \theta \equiv x^2, \zeta \equiv x^3$  можно ввести либо заданием преобразования

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3), \quad (\text{П.1.})$$

либо заданием уравнений координатных поверхностей

$$x^i(\mathbf{r}) = \text{const}. \quad (\text{П.2.})$$

Соответственно этому можно ввести две системы базисных и взаимных векторов. Базисные векторы (с нижним индексом)

$$\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i \quad (\text{П.3.})$$

указывают направление изменения координаты  $x^i$  в соответствии с выражением для ориентированного элемента длины

$$dl = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i \quad (\text{П.4.})$$

(по повторяющемуся дважды индексу  $i$  производится суммирование). Векторы  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , таким образом, касательны к координатной поверхности  $x^1 = \text{const}$  и т. д. Взаимные к базисным векторы (с верхним индексом)

$$\mathbf{e}^k = \nabla x^k, \quad (\text{П.5.})$$

по определению, направлены по нормали к соответствующим координатным поверхностям  $x^k = \text{const}$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{e}^1$  ортогонален векторам  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и т. д.

Точно так же вектор  $\mathbf{e}_1$  как касательный к линии пересечения поверхностей  $x^2 = \text{const}, x^3 = \text{const}$  ортогонален векторам  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$ . Можно написать поэтому

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 = C_1 [\mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3], \quad \mathbf{e}_2 = C_2 [\mathbf{e}^3 \mathbf{e}^1], \quad \mathbf{e}_3 = C_3 [\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2], \\ \mathbf{e}^1 = C^1 [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{e}^2 = C^2 [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1], \quad \mathbf{e}^3 = C^3 [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.6.})$$

Заметим, что из выражения приращения любой скалярной функции

$$d\varphi = \nabla \varphi dl = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \nabla x^k \right) \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^k dx^i \quad (\text{П.7.})$$

следует, что

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^k = \delta_{ik}, \quad (\text{П.8.})$$

отсюда легко получаем

$$C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{C^1} = \frac{1}{C^2} = \frac{1}{C^3} = \sqrt{g}, \quad (\text{П.9})$$

где

$$\sqrt{g} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3} \quad (\text{П.10})$$

представляет, согласно определению векторов  $\mathbf{e}_i$ , якобиан преобразования  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ :

$$\sqrt{g} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \frac{1}{\nabla x^1 \nabla x^2 \nabla x^3}. \quad (\text{П.11})$$

**б) Метрический тензор.** Все свойства внутренней геометрии координатной системы  $x^1, x^2, x^3$  определяются выражением квадрата элемента длины

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (\text{П.12})$$

Коэффициенты  $g_{ik}$  образуют фундаментальный метрический тензор. Из выражения для  $dl$  следует, что

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k. \quad (\text{П.13})$$

Квадрат градиента выражается через другой тензор  $g^{ik}$ :

$$(\nabla\varphi)^2 = g^{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}, \quad (\text{П.14})$$

где

$$g^{ik} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k. \quad (\text{П.15})$$

Обозначим алгебраические дополнения элементов  $g_{ik}$  и  $g^{ik}$  соответственно через  $G_{ik}$  и  $G^{ik}$ . Используя для  $\mathbf{e}_i$  выражение (П.3), с помощью формул (П.6), (П.8) нетрудно убедиться, что

$$g_{ik} = g G^{ik}. \quad (\text{П.16})$$

Соответственно, используя формулы для  $\mathbf{e}^i$  (П.5), получаем

$$g^{ik} = g G_{ik}. \quad (\text{П.17})$$

Возводя в квадрат соотношение  $\sqrt{g} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  и используя правило перемножения определителей, получаем

$$g = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad (\text{П.18})$$

т. е.  $g = \text{Det } g_{ik}$ . Соответственно возведение в квадрат равенства  $(\sqrt{g})^{-1} = \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3$  дает  $\text{Det } g^{ik} = 1/g$ .

**в) Компоненты векторов.** Любой физический вектор  $\mathbf{A}$  (напряженность магнитного поля  $\mathbf{B}$ , скорость  $\mathbf{v}$  и т. д.) может быть представлен в виде разложения как по базисным, так и по взаимным векторам:

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A_i \mathbf{e}^i, \quad (\text{П.19})$$

где  $A_i$  — ковариантная и  $A^i$  — контравариантная проекции,

Пользуясь условием (П.8), находим

$$A^i = \mathbf{A}e^i = \mathbf{A} \nabla x^i, \quad A_i = \mathbf{A} e_i = \mathbf{A} \operatorname{gr} / \partial x^i. \quad (\text{П. 20})$$

Для скалярного произведения двух векторов имеем

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = A^i e_i e^k B_k = A^i B_i = A_i B^i. \quad (\text{П. 21})$$

Квадрат длины вектора

$$|\mathbf{A}|^2 = A_i A^i. \quad (\text{П. 22})$$

Перемножая векторно  $\mathbf{A} = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3$ ,  $\mathbf{B} = B_1 e^1 + B_2 e^2 + B_3 e^3$ , получаем

$$[\mathbf{A} \mathbf{B}] = [\mathbf{A} \mathbf{B}] e^1 = (A_2 B_3 - A_3 B_2) [e^2 e^3] e^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} (A_2 B_3 - A_3 B_2). \quad (\text{П. 23})$$

Соответственно

$$[\mathbf{A} \mathbf{B}]_1 = [\mathbf{A} \mathbf{B}] e_1 = (A^2 B^3 - A^3 B^2) [e_2 e_3] e_1 = \sqrt{g} (A^2 B^3 - A^3 B^2). \quad (\text{П. 24})$$

Выражения для остальных компонент векторного произведения получаются циклической перестановкой индексов.

Если в выражениях  $A^i = \mathbf{A}e^i$  и  $A_i = \mathbf{A}e_i$  представить вектор  $\mathbf{A}$  соответственно в виде  $\mathbf{A} = A_k e^k$  и  $\mathbf{A} = A^k e_k$ , то получим связь контра- и ковариантных компонент

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k, \quad (\text{П. 25})$$

так что, например,

$$|\mathbf{A}|^2 = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \quad (\text{П. 26})$$

В ортогональной системе координат

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 &= g_{11} A^1 A^1 + g_{22} A^2 A^2 + g_{33} A^3 A^3 = \\ &= g^{11} A_1 A_1 + g^{22} A_2 A_2 + g^{33} A_3 A_3. \end{aligned} \quad (\text{П. 27})$$

Отсюда следует выражение для «физических» компонент вектора через контра- и ковариантные:

$$A_{\text{физ}}^i = \sqrt{g_{11}} A^1 = \sqrt{g^{11}} A_1 \text{ и т. д.} \quad (\text{П. 28})$$

**г) Дифференциальные операторы.** Для решения физических задач в избранной системе координат необходимо иметь выражения для наиболее употребительных операторов, таких, как  $\nabla$ ,  $\operatorname{div}$ ,  $\operatorname{rot}$ ,  $\nabla^2$ . Из-за различия ко- и контравариантных компонент векторов соответствующие выражения можно представить в различной форме. Целесообразно использовать простейшую. При этом в одних операциях удобнее использовать ковариантные, а в других — контравариантные представления векторов.

Из выражения  $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \nabla x^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} e^i$  видно, что ковариантные компоненты градиента совпадают просто с производными по соответствующим координатам:

$$(\nabla \varphi)_i = \partial \varphi / \partial x^i. \quad (\text{П. 29})$$

Контравариантные компоненты выражаются через  $\partial\varphi/\partial x^i$  по общим правилам и выглядят довольно сложно. Отсюда следует, что при записи по компонентам векторного уравнения, содержащего градиенты, целесообразно использовать ковариантные проекции. Например, первая компонента уравнения равновесия

$$c \frac{\partial p}{\partial x^1} = \sqrt{g} (j^2 B^3 - j^3 B^2). \quad (\text{П. 30})$$

Применим теперь операцию  $\text{div}$  к вектору  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ :

$$\text{div } \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \nabla A^i + A^i \text{div } \mathbf{e}_i. \quad (\text{П. 31})$$

Учитывая, что  $\mathbf{e}_i \nabla A^i = \partial A^i / \partial x^i$ , а  $\text{div } \mathbf{e}_1 = \text{div } \sqrt{g} [\nabla x^2 \nabla x^3] = [\nabla x^2 \nabla x^3] \nabla \sqrt{g} = [\nabla x^2 \nabla x^3] \nabla x^1 \partial \sqrt{g} / \partial x^1 = \partial \ln(\sqrt{g}) / \partial x^1$ , получаем

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i). \quad (\text{П. 32})$$

Применим операцию  $\text{rot}$  к вектору  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = A_i \nabla x^i$ :

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla A_i \nabla x^i]. \quad (\text{П. 33})$$

Пользуясь правилом раскрытия векторного произведения, находим

$$(\text{rot } \mathbf{A})^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right). \quad (\text{П. 34})$$

**д) Интегральные операторы.** Приведем форму записи некоторых интегралов в криволинейных координатах.

В соответствии с определением (П. 12) квадрата элемента длины контурный интеграл I рода вдоль координатной линии  $x^2 = \text{const}$ ,  $x^3 = \text{const}$  записывается в виде

$$\int f dl_{(1)} = \int f \sqrt{g_{11}} dx^1. \quad (\text{П. 35})$$

Контурный интеграл II рода в соответствии с правилами раскрытия скалярного произведения векторов с координатами

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}, \quad d\mathbf{l} = \{dx^1, dx^2, dx^3\}$$

имеет вид

$$\int \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int A_i dx^i. \quad (\text{П. 36})$$

Ориентированный элемент площади координатной поверхности  $x^1 = \text{const}$

$$d\mathbf{S}_{(1)} = [d\mathbf{l}_{(2)}, d\mathbf{l}_{(3)}] = [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] dx_2 dx_3 = \sqrt{g} \nabla x^1 dx^2 dx^3, \quad (\text{П. 37})$$

так что элемент объема в криволинейных координатах

$$dV = d\mathbf{l}_{(1)} d\mathbf{S}_{(1)} = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \quad (\text{П. 38})$$

$$\int f dV = \int f \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (\text{П. 39})$$



Так как  $|\nabla x^1|^2 = g^{11}$ , то поверхностный интеграл I рода по координатной поверхности  $x^1 = \text{const}$

$$\int f dS_{(1)} = \int f \sqrt{g g^{11}} dx^2 dx^3. \quad (\text{П.40})$$

Представляя в соответствии с (П.37) произвольный ориентированный элемент площади ковариантными компонентами

$$dS_i = \sqrt{g} \{ dx^2 dx^3, dx^3 dx^1, dx^1 dx^2 \}, \quad (\text{П.41})$$

найдем выражения потока вектора **A** через произвольную поверхность

$$\int \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int \sqrt{g} (A^1 dx^2 dx^3 + A^2 dx^1 dx^3 + A^3 dx^1 dx^2). \quad (\text{П.42})$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шафранов В. Д. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Под ред. М. А. Леонтовича, М., Госатомиздат, 1963, с. 92—130.
2. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Там же, вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 3—208.
3. Мухоматов В. С. — В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. Т. 1, ч. 1, М., ВИНТИ, 1980, стр. 3—118.
4. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1973, с. 205—273.
5. Hinton F. L., Hazeltine R. D. — Rev. Mod. Phys., 1976, v. 48, p. 239.
6. Сивухин Д. В. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. Под ред. М. А. Леонтовича, М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
7. Chew G., Goldberger M., Low M. — Proc. Roy. Soc., 1956, v. A 236, p. 112.
8. Попрядухин А. П. — Журн. техн. физ., 1965, т. 35, с. 927.
9. Волков Т. Ф. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1964, с. 3.
10. Taylor J. В. — Plasma Physics. Lectures at a Seminar, Trieste 5—31. October. 1964. IAEA. Vienna, 1965, p. 449.
11. Hirshman S. — Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 224.
12. Брагинский С. И., Шафранов В. Д. — В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, с.26
13. Шафранов В. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1957, т. 33, с. 710.
14. Град Г., Рубин Г. — В кн.: Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых, Т.1. — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, с. 131.
15. Lüst R., Schlüter A. — Z. Naturforsch., 1957, Bd 12a, s. 850.
16. Grad H., Hu P. N., Stevens D. A. — Proc. US Nat. Acad. Sci., 1975, v. 72, p. 3789.
17. Bateman G., Peng Y.-K.M. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 829.
18. Johnson J. L. e.a. — Phys. Fluids, 1958, v. 1, p. 281.
19. Кадомцев Б. Б. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1959, т. 37, с. 1352.
20. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. — Там же, 1973, т. 65, с. 575.
21. Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z., Taylor J. В. e. a. — Nucl. Fusion, 1966, v. 6, p. 297.
22. Callen J. D., Waddel B. V. e. a. — In.: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., V.1, Vienna IAEA, 1979, p. 415.

23. Hamada S. — Nucl. Fusion, 1963, v. 1—2, p. 23.
24. Green J., Johnson J. L., — Phys. Fluids, 1962, v. 5, p. 510.
25. Shafranov V. D., Zakharov L. E. — Nucl. Fusion, 1972, v. 12, p. 599.
26. Shafranov V. D. — Plasma Phys., 1971, v. 13, p. 757.
27. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. — Журн. техн. физ., 1973, т. 43, с. 225.
28. Bortnikov A. V., Vaiborodov Yu. T., Brevnov N. N. e. a. Sixth Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys. V. I. Moscow, 1973, p. 165.
29. Helton F. L., Wang T. S. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 1523.
30. Wootton A. J. — Ibid., 1979, v. 19, p. 987.
31. Gajewskii R. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 70.
32. Захаров Л. Е., Орлинский Д. В. — Препринт ИАЭ им. И. В. Курчатова, ИАЭ—2536, Москва, 1977.
33. Strauss H. R. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 1040.
34. Bateman G. MHD Instabilities, Cambridge, MIT Press, 1978.
35. Абрамов В. А., Вихрев В. В., Погуце О. П. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 633.
36. Goedbloed J. P., Zakharov L. E. — Nucl. Fusion, 1980, v. 20, p. 1100.
37. Захаров Л. Е. — Физика плазмы, 1981, т. 7, с. 18.
38. Шафранов В. Д. — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1959, т. 37, с. 1088.
39. Бажанова А. Е., Шафранов В. Д. — Журн. техн. физ., 1971, т. 41, с. 1357.
40. Лейтес Л. В. — Электричество, 1960, т. 11, с. 76.
41. Шафранов В. Д. — Журн. техн. физ., 1972, т. 42, с. 1785.
42. Zakharov L. E. — Nucl. Fission, 1973, v. 13, p. 595.
43. Захаров Л. Е. — Журн. техн. физ., 1975, т. 45, с. 1049.
44. Тихонов А. Н. — Докл. АН СССР, 1963, т. 151, с. 501.
45. Киуру Э. М., Меченов А. С. Стандартная программа для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма I рода методом регуляризации. Вып. 45, М., Изд-во ВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, 1970.
46. Kerner W., Pfirsch D., Tasso H. — Nucl. Fusion, 1972, v. 12, p. 433
47. Леонтович М. А. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, Т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 222.
48. Путьинский С. В. — Журн. техн. физ., 1979, т. 49, с. 1834.
49. Быков В. Е. и др. — Препринт ХФТИ-76-39, Харьков, 1976.
50. Methods in Computational Physics. V. 16. Controlled Fusion New York — San Francisco — London, Academic Press, 1976 (Имеется перевод: Вычислительные методы в физике. Т.16. Управляемый термоядерный синтез, М., Мир, 1980).
51. Захаров Л. Е. — Журн. техн. физ., 1974, т. 44, с. 1606.
52. Suzuki Y. — Nucl. Fusion, 1974, v. 14, p. 346.
53. Захаров Л. Е. In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. V. 1. Vienna IAEA, p. 421.
54. Feneberg W., Lackner K. — Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 549.
55. Callen J. D., Dory R. A. — Phys. Fluids 1972, v. 15, p. 1523.
56. Chu M. e. a. Preprint of CALF, GA—A 12726.
57. Lackner K. — Computer Phys. Commun., 1973, v. 12, p. 33.
58. Chance M. S. e. a. In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. V. I. Vienna, IAEA, 1975, p. 463.
59. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. — Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 995.
60. Clark J. F., Sigmar D. J. — Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 70.

61. Хаит В. Д. — Физика плазмы, 1980, т. 6, стр. 871.
62. Grad H. — Phys. Fluids, 1967, v. 10, p. 137.
63. Spies G. O., Nelson D. B. — Ibid., 1974, v. 17, p. 1879.
64. Sestero A., Taroni A. — Nucl. Fusion, 1976, v. 16, p. 164.
65. Cooper W. A., Bateman G., Nelson D. B. — Ibid., 1980, v. 20, p. 985.
66. Mukhovatov V. S., Shafranov V. D. — Ibid., 1971, v. 11, p. 605.
67. Blum J., Cissoko G., Dei Cas R. e. a. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. V. 1., Vienna, IAEA, 1979, p. 521.
68. Шафранов В. Д. — Атомная энергия, 1965, т. 18, с. 255.
69. Mukhovatov V. S. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. V. 2. Vienna, IAEA, 1966, p. 577.
70. Абрамов В. А., Погуце О. П., Юрченко Э. И. — Физика плазмы, 1975, т. 1, с. 536.
71. Wesson J. A. — Nucl. Fusion, 1978, v. 18, p. 87.
72. Осовец С. М. — В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 238.
73. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. — Препринт ИАЭ им. И. В. Курчатова, ИЭА—2789, М., 1977.
74. Mercier C. — Nucl. Fusion, 1963, v. 3, p. 9.
75. Шафранов В. Д. — Ibid., 1964, v. 4, p. 114.
76. Шафранов В. Д. — Ibid., p. 232.
77. Shafranov V. D., Zakharov L. E. — In: Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. V. 2, Vienna, IAEA, 1977, p. 155.
78. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. — Журн. техн. физ., 1978. т. 48, с. 1156.

<b>УСКОРЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ТОКАМАКЕ. В. В. Параш, О. П. Погуце</b>	<b>5</b>
§ 1. Введение . . . . .	5
§ 2. Образование ускоренных электронов в токамаке. . . . .	6
§ 3. Траектории ускоренных электронов в токамаке . . . . .	14
§ 4. Линейная теория неустойчивости ускоренных электронов . . . . .	18
§ 5. Квазилинейная стадия развития неустойчивости . . . . .	23
§ 6. Макроскопические эффекты, сопровождающие развитие неустойчивости . . . . .	35
§ 7. Аномальная диффузия ускоренных электронов. . . . .	42
§ 8. Нелинейные процессы и нагрев ионов . . . . .	49
§ 9. Заключение . . . . .	54
Список литературы . . . . .	54
<b>БАЛЛОННЫЕ ЭФФЕКТЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ</b>	
<i>О. П. Погуце, Э. И. Юрченко</i> . . . . .	56
Введение . . . . .	56
<b>Глава 1. Исходные уравнения и методы исследования устойчивости идеальной плазмы</b> . . . . .	62
§ 1.1. Равновесие плазмы и системы координат . . . . .	62
§ 1.2. Метод малых колебаний. Разложение уравнений по малому параметру . . . . .	65
§ 1.3. Энергетический метод. Упрощение энергетического принципа . . . . .	69
<b>Глава 2. Баллонные моды желобковой неустойчивости</b> . . . . .	74
§ 2.1. Метод эквивалентных гармоник. . . . .	74
§ 2.2. Асимптотический вариационный метод решения дифференциальных уравнений . . . . .	78
§ 2.3. Аналитический критерий устойчивости баллонных мод . . . . .	82
§ 2.4. Численные расчеты баллонных мод . . . . .	90
<b>Глава 3. Баллонные моды винтовой неустойчивости</b> . . . . .	95
§ 3.1. Теория винтовой неустойчивости тороидального шнура . . . . .	95
§ 3.2. Численные расчеты низких мод . . . . .	103
<b>Глава 4. Исследование устойчивости диссипативной плазмы</b> . . . . .	107
§ 4.1. Исходные уравнения и их упрощение . . . . .	107
§ 4.2. Беспороговые диссипативные баллонные моды . . . . .	112
Заключение . . . . .	114
Список литературы . . . . .	116

# РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ С ТОКОМ В ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

<i>Л. Е. Захаров, В. Д. Шафранов</i> . . . . .	118
Введение . . . . .	118
<b>Глава 1. Уравнения равновесия для тороидальной плазмы</b> . . . . .	118
<b>Глава 2. Общие соотношения для равновесных плазменных конфигураций</b> . . . . .	125
§ 2.1. Прямолинейный плазменный шнур круглого сечения . . . . .	125
§ 2.2. Осесимметричные конфигурации . . . . .	127
§ 2.3. Конфигурации с винтовой симметрией . . . . .	131
§ 2.4. Квазицилиндрическое описание равновесия плазмы . . . . .	133
§ 2.5. Удерживающее поле. Принцип виртуального кожуха. . . . .	138
§ 2.6. Интегральные соотношения для тороидального плазменного шнура . . . . .	139
<b>Глава 3. Точные решения уравнений равновесия</b> . . . . .	147
§ 3.1. Прямолинейный шнур эллиптического сечения . . . . .	147
§ 3.2. Равновесие шнура эллиптического сечения с винтовой симметрией. . . . .	151
§ 3.3. Плазменный тор круглого сечения . . . . .	155
§ 3.4. Компактный тороидальный шнур. Вихрь Хилла . . . . .	159
§ 3.5. Магнитостатические задачи, связанные с равновесием плазмы . . . . .	163
§ 3.6. Численные методы решения задач равновесия . . . . .	175
§ 3.7. Равновесие с анизотропным давлением. . . . .	190
<b>Глава 4. Равновесие плазменного шнура круглого сечения</b> . . . . .	192
§ 4.1. Приближение малой тороидальности для осесимметричного шнура . . . . .	193
§ 4.2. Влияние элементов конструкции на равновесие . . . . .	202
§ 4.3. Равновесие шнура круглого сечения с анизотропным давлением . . . . .	209
§ 4.4. Устойчивость равновесия плазменного шнура . . . . .	211
§ 4.5. Равновесие плазменного шнура с пространственной осью. . . . .	213
§ 4.6. Зондовые измерения в токамаке. . . . .	219
<b>Глава 5. Об эволюции равновесия тороидальной плазмы</b> . . . . .	222
§ 5.1. Одномеризация уравнений переноса . . . . .	223
§ 5.2. Уравнение эволюции магнитных потоков . . . . .	225
Приложение . . . . .	229
Список литературы. . . . .	233

## **ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ**

**В ы п у с к 11**

**Редактор В. Н. Безрукова**  
**Художественный редактор А. Т. Кирьянов**  
**Переплет художника Н. Я. Вовк**  
**Технический редактор Н. А. Власова**  
**Корректор З. Б. Драновская**

**ИБ № 1209**

Сдано в набор 22.06.81. Подписано в печать 04.01.82. Т-00204  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная.  
Печать высокая. Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 16,39. Тираж 1120 экз.  
Заказ 339 Цена 2 р. 80 к.

Энергоиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ  
ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОИЗДАТ